数学序論 A（担当：小森）１１月６日：同値関係、集合の分割、WELL-DEFINED

学籍番号・氏名 ______________________________

問題 1. 集合 X から集合 Y への全射 $f : X \to Y$ が与えられているとする。集合 X の二項関係 $\sim$ を、$a, b \in X$ に対し $a \sim b$ を $f(a) = f(b)$ で定義する。このとき以下を示せ。

(1) 二項関係 $\sim$ は集合 X の同値関係である。

(2) 商集合 $X/\sim$ の任意の元 $[x]$ に対し、$F([x]) = f(x)$ とすると、F は $X/\sim$ から Y への写像として *well-defined* である。

(3) この写像 $F : X/\sim \to Y$ は全単射である。

Proof. (1) (a) $\forall a \in X$, $f(a) = f(a)$ より $a \sim a$ となり反射律を満たす。

(b) $\forall a, b \in X$, $a \sim b$ ならば $f(a) = f(b)$ より、$f(b) = f(a)$ なので $b \sim a$ となり対称律を満たす。

(c) $\forall a, b, c \in X$, $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $f(a) = f(b)$ かつ $f(b) = f(c)$ より、$f(a) = f(c)$ なので $a \sim c$ となり推移律を満たす。

(2) 商集合 $X/\sim$ の元の２通りの表示 $[x] = [y]$ に対し $x \sim y$ より $f(x) = f(y)$ なので、$F([x]) = f(x) = f(y) = F([y])$ となり F は $X/\sim$ から Y への写像として well-defined である。

(3) まず F が全射であることを示す。Y の任意の元 b に対し、仮定から $f : X \to Y$ は全射なので、X の元 a が存在して $f(a) = b$ を満たす。よって商集合 $X/\sim$ の元 $[a]$ に対し、$F([a]) = f(a) = b$ となるので F は全射である。

次に F が単射であることを示す。商集合 $X/\sim$ の元 $[p], [q]$ に対し、$F([p]) = F([q])$ と仮定する。このとき $f(p) = f(q)$ より $p \sim q$ となるので $[p] = [q]$、つまり F は単射である。