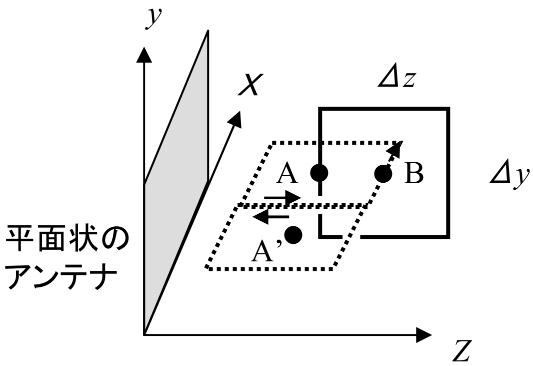
マクスウェルの方程式（積分型）からの電磁波の波動方程式の導出

電磁波の伝搬を計算してみましょう。ただ、図45のままだとまわりに広がっていく波なので、計算が大変です。簡単化して、右側にだけ伝わっていく波を考えることにしましょう。しかも、電磁波の発信源は平面状のアンテナであると考えることにしましょう。図45では、円形のループを考えましたが、計算を簡単にするために四角いループを使いましょう。それから、下の電磁波の場所に記号をつけます。



点Aを中心とする四角いループ（点線）内の空間的に一様な（ループ内のE がどこでも同じ大きさである）電場E が時間変化するので

$$H\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x+0\Delta z-H\left(z-\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x+0\Delta z=\varepsilon\frac{dE(z)}{dt}\Delta x\cdot\Delta z$$

となります(周回積分は反時計回りにとります) 。左辺で0をかけている項は、z方向に平行な辺からの分です。z方向に平面的に進む波を考えているので、すぐとなりのA'のループにも磁場が発生し、この辺の磁場は打ち消しあってゼロになります。 Δx Δz で両辺を割ると、

$$\frac{H\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)-H\left(z-\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}=\varepsilon\frac{dE(z)}{dt}$$

になります。左辺は微分の形をしているので、

$$\frac{dH(z)}{dz}=\varepsilon\frac{dE(z)}{dt}$$

という式が得られます。

次に、点Bを中心とする四角い縦のループ（実線）内の空間的に一様な（ループ内のH がどこでも同じ大きさである）磁場H が、時間変化するので、

$$-E(z+\Delta z)\Delta y+0\Delta z+E(z)\Delta y+0\Delta z=-\mu\frac{dH\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)}{dt}\cdot\Delta y\cdot\Delta z$$

となります。左辺で0をかけている項は、z方向に平行な辺からの分です。Δy Δ z で両辺を割ると、

$$\frac{E(z+\Delta z)-E(z)}{\Delta z}=\mu\frac{dH\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)}{dt}$$

になります。左辺は微分の形をしているので、

$$\frac{dE\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)}{dz}=\mu\frac{dH\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)}{dt}$$

という式が得られます。これで式が二つできました。

一つは、

$$\frac{dH(z)}{dz} = \varepsilon \frac{dE(z)}{dt} \qquad （1）$$

という式。もう一つは、

$$\frac{dE\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)}{dz} = \mu \frac{dH\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)}{dt}$$

という式です。二つ目の式は、数学的に

$$\frac{dE(z)}{dz} = \mu \frac{dH(z)}{dt} \qquad （2）$$

と等価です。

(1)式をtで微分して、(2)式をzで微分してみましょう。すると、

$$\frac{d^2H(z)}{dzdt} = \varepsilon \frac{d^2E(z)}{dt^2} \qquad （3）$$

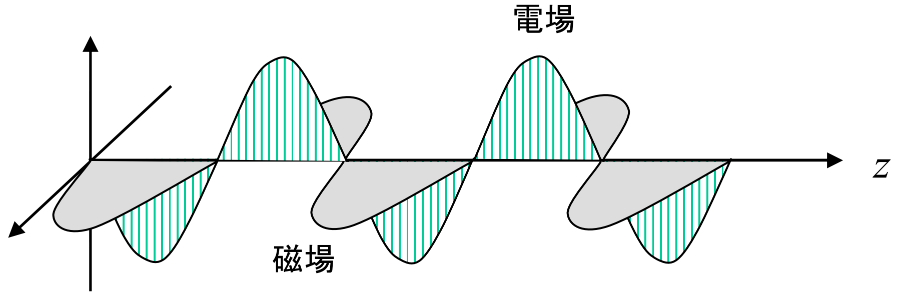
$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} = \mu \frac{d^2H(z)}{dtdz} \qquad （4）$$

となります。（3）式の左辺と、（4）式の右辺には同じ微分があるので、式をまとめると

$$\frac{d^2E(z)}{dt^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{d^2E(z)}{dz^2}$$

と書けます。Hに関しても類似の式が導けますが、これがマクスウェルが導いた電磁波を表す式です。

この形の微分方程式は波を表していて、この波は、$(\mu\varepsilon)^{-1/2}$の速度で移動することを表します。μεの値を入れて計算すると、光の速度の測定値にほぼ一致することが分かりました。



この図が図45の簡単なモデルと異なることに注意しましょう。

早稲田大学理工学部　竹内研　2003.4, 2004.5 改訂