SHIFTING OPERATION と次数付ベッチ数について

村井　聡　(大阪大学大学院 情報科学研究科)

Introduction

本稿は shifting operation, 特に algebraic shifting と graded Betti number の関係についての最近の研究結果について解説することを目的としたものである.

元々‘shifting’ と呼ばれる操作は Eröds, Ko, Rado [19] らにより導入され, 組合せ論で活躍した理論である. 簡単にいえば, shifting とは (単体的複体等の) 有限集合の族をより簡単な構造を持つ有限集合の族に置き換える操作である. 他方, algebraic shifting は Kalai [25, 28] により導入された shifting の一種で, 単体的複体の f-vector の特徴付けに関する問題で多くの貢献をしてきた (詳しくは第 4 節の補足を見よ). Kalai は組合せ論的な立場から algebraic shifting を定義したが, 環論的な立場から見れば, algebraic shifting とは squarefree 単項式イデアルの generic initial ideal を考えることに対応する. ここ 10 年程の間に generic initial ideal を調べるという代数的な立場からの algebraic shifting の研究が, 主に Aramova, Herzog, Hibi らによって進められてきた (例えば, [2, 3, 5, 23] を見よ). 本稿ではこの代数的な立場に沿って algebraic shifting とその性質についての簡単な解説を与える.

初めに本稿の構成を述べておく. 先に述べたように, algebraic shifting とは代数的には generic initial ideal を取ることに他ならない. 前半の 1–3 節は generic initial ideal の紹介に当てる. 第 1 節で多項式環上の generic initial ideal の基本的な性質, 第 2 節で generic initial ideal と graded Betti number の関係について述べる. また第 3 節では外積代数上の generic initial ideal を扱う. algebraic shifting についての解説は第 4 節と第 5 節で行う. 第 4 節で algebraic shifting や shifting operation の定義とその基本的な性質を紹介し, 第 5 節で shifting operation と graded Betti number の関係についての Aramova–Herzog–Hibi 予想について述べる. また第 6 節では generic initial ideal を使って graded Betti number を組合せ論的に比較する際の手法についてまとめた.

本稿の基本的な方針として, 定理の証明は与えず, 結果の紹介に止めることとする. 但し, symmetric shifting が well-defined であることと, 第 6 節の幾つかの主張については証明の概略を与えた. また本稿ではあまり触れないが, [23] や [29] に algebraic shifting に関する様々な未解決問題が載っているのでそちらも参照して欲しい. (これ等の問題に対する最近の結果については [6, 7, 8, 33, 34, 36, 37] 等を見よ.)

The author is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

1. Generic initial ideals in a polynomial ring

この節では, 多項式環上の generic initial ideal に関する基本的な事項について簡単に触れておくことにする. 定理の証明などの詳しい事項については [17, §15.9] や [21] を見よ.

K は無限体とし, $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を標準的な次数付けを持つ体 K 上の n 変数多項式環とする. イデアル $I \subset S$ の単項式順序 $<_\sigma$ に関するイニシャルイデアルを $\mathrm{in}_\sigma(I)$ と書く. $GL_n(K)$ を体 K 上の一般線形群とする. 正則行列 $\varphi = (a_{ij}) \in GL_n(K)$ に対し, φ を多項式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$ を

$$\varphi(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i)$$

と移すような環 S の自己同型写像と見る. generic initial ideal は次の定理によって定義される.

Theorem 1.1 (Galligo, Bayer–Stillman)**.** 単項式順序 $<_\sigma$ を固定する. 任意の斉次イデアル $I \subset S$ に対し, ある空でないザリスキー開集合 $U \subset GL_n(K)$ が存在し, 任意の $\varphi \in U$ に対し $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ は一定となり, かつ U は上三角行列全体の集合と交わる.

Definition 1.2. 定理 1.1 において, U は空でないザリスキー開集合であるから, 定理の条件を満たす $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ は一意的に定まる. この $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ を I の単項式順序 $<_\sigma$ に関する **generic initial ideal** と呼び, $\mathrm{gin}_\sigma(I)$ と書く.

generic initial ideal を考えることの有効性は二つある. 一つは, generic initial ideal が簡単な構造を持つ単項式イデアルとなることで, もう一つは (次数逆辞書式順序の) generic initial ideal をとってもイデアルの大雑把な性質が変わらないことである. ここでは, 先ず, 前者について解説する. イデアル $I \subset S$ が, 任意の正則上三角行列 $\varphi \in GL_n(K)$ に対し $\varphi(I) = I$ を満たす時, I を **Borel-fixed** であるという.

Theorem 1.3 (Galligo, Bayer–Stillman)**.** 任意の斉次イデアル $I \subset S$ 及び $x_1 >_\sigma \cdots >_\sigma x_n$ を満たす任意の単項式順序 $<_\sigma$ に対し $\mathrm{gin}_\sigma(I)$ は Borel-fixed.

Borel fixed なイデアルは組合せ論的に特徴付けることも出来る. p を素数, $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $k = \sum_i k_i p^i$ 及び $l = \sum_i l_i p^i$ を k 及び l の p-進表示とする. 半順序 $\leq_p$ を, 全ての i に対して $k_i \leq l_i$ となる時, $k \leq_p \ell$ とすることで定める. また, $k \leq_0 l$ を通常の大小関係で定める.

Definition 1.4. 整数 p は 0 又は素数であるとする. 単項式イデアル $I \subset S$ が **p-Borel** であるとは, 任意の単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in I$, 整数 $1 \leq i < j \leq n$ 及び $\nu \leq_p a_j$ に対し, $(x_i/x_j)^\nu u \in I$ を満たす時にいう.

Lemma 1.5. 体 K の標数は $p \geq 0$ であるとし, I を S のイデアルとする. 次は同値.

(i) I は Borel-fixed;
(ii) I は p-Borel な単項式イデアル.

0-Borel な単項式イデアル $I \subset S$ は **strongly stable** であるといわれる, 言い換えるなら, 単項式イデアル I が strongly stable であるとは, 任意の単項式 $ux_j \in I$ 及び任意の $1 \leq i < j$ に対して $ux_i \in I$ を満たす時にいう.

Remark 1.6. 定義からもわかる通り, strongly stable イデアルは非常に扱い易いイデアルである. 他方, 一般の p-Borel イデアルは strongly stable イデアルよりずっと構造は複雑である. よって generic initial ideal を考える際には, 体の標数が 0 であることを仮定することが多い.

Example 1.7. さて, generic initial ideal が定義できることは既に見た. ではどのように generic initial ideal を計算すれば良いのか？というのは自然な疑問である. 実はこれは非常に難しく, 効率的な計算方法は今の所知られていない. CoCoA [14] や Macaulay2 [20] 等の計算機システムでは, ランダムに行列 $\varphi \in GL_n(K)$ を取ってから $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ を計算することで体の標数が 0 である時の "恐らく generic initial ideal であると思われるイデアル" を計算する.

また, あまり実用的ではないが, 直接計算したいならば次のような方法もある. 有理関数体 $A = K(a_{ij} : 1 \le i, j \le n)$ を考え, $\varphi = (a_{ij}) \in GL_n(A)$ とする. この時, 斉次イデアル $I \subset S$ に対し, $\varphi(I)$ を $A[x_1, \dots, x_n]$ 上のイデアルと思って $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ を計算すれば, これが I の generic initial ideal となる.

例えば, $I = (x_1^2, x_2^2) \subset K[x_1, x_2]$ とし $\varphi = \binom{a_{11} a_{12}}{a_{21} a_{22}}$ とする. また $\mathrm{char}(K) \neq 2$ を仮定する. すると

$$\varphi(I) = ((a_{11}x_1 + a_{21}x_2)^2,\ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)^2)$$

である. (かなり面倒だが) このイデアルを $A[x_1, x_2]$ 上のイデアルだと思って, 次数辞書式順序 $<_{\mathrm{lex}}$ に関するイニシャルイデアルを計算してやると, $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(\varphi(I)) = (x_1^2, x_1x_2, x_2^3)$ となり, これが $\mathrm{gin}_{\mathrm{lex}}(I)$ となる. 但し, 次数辞書式順序 $<_{\mathrm{lex}}$ は $x_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} x_n$ を満たすものとする.

最後に, generic initial ideal の満たす基本的な性質を幾つか記しておく.

Lemma 1.8. I, J を S の斉次イデアル, $<_\sigma$ を $x_1 >_\sigma \cdots >_\sigma x_n$ を満たす単項式順序とする.

(i) I と $\mathrm{gin}_\sigma(I)$ は同じヒルベルト関数を持つ;
(ii) I が Borel-fixed なら $\mathrm{gin}_\sigma(I) = I$;
(iii) $I \subset J$ なら $\mathrm{gin}_\sigma(I) \subset \mathrm{gin}_\sigma(J)$;
(iv) 任意の $\psi \in GL_n(K)$ に対し, $\mathrm{gin}_\sigma(I) = \mathrm{gin}_\sigma(\psi(I))$.

Proof. ヒルベルト関数はイニシャルイデアルを取ることで変化しないので (i) は明らかである. また $\mathrm{gin}_\sigma(I) = \mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ を満たす $\varphi \in GL_n(K)$ は上三角上列で取れるので (ii) も明らか. 次に, 2 つの空でないザリスキー開集合の共通部分は空でないので, $\mathrm{gin}_\sigma(I) = \mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))$ かつ $\mathrm{gin}_\sigma(J) = \mathrm{in}_\sigma(\varphi(J))$ となる $\varphi \in GL_n(K)$ が存在する. この事実から (iii) は直ちに従う. 最後に (iv) を示す. $U \subset GL_n(K)$ を, 任意の $\varphi \in U$ に対し $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I)) = \mathrm{gin}_\sigma(I)$ を満たす空でないザリスキー開集合とする. この時 $U' = \{\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi \in U\}$ とおけば, 任意の $\varphi \in U'$ に対し $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(\psi(I))) = \mathrm{gin}_\sigma(I)$ を満たす. また U' は空でないザリスキー開集合であるから, generic initial ideal の一意性より $\mathrm{gin}_\sigma(\psi(I)) = \mathrm{gin}_\sigma(I)$ である. □

2. Generic initial ideals and graded Betti numbers

体の標数が 0 である時に generic initial ideal と graded Betti number の関係を調べることは generic initial ideal の理論の中心的な問題であった. こういった問題に

関心がもたれた理由は二つある．一つは，次数逆辞書式順序に関する generic initial ideal を取っても projective dimension や Castelnuovo–Mumford regularity といった値が変化しないことで，もう一つは strongly stable イデアルの graded Betti number が簡単に計算できることである．この節では，これらの事実を簡単に紹介する．

初めに strongly stable イデアルの graded Betti number を非常に綺麗な形で計算した Eliahou–Kervaire [18] の結果について述べることにする．有限生成次数付 S-加群 M の **graded Betti number** とは整数 $\beta_{ij}(M) = \dim_K \mathrm{Tor}_i(M,K)_j$ のことである．単項式 u に対し $m(u) = \max\{j : x_j \text{ divides } u\}$ とおく．単項式イデアル I が **stable** であるとは任意の単項式 $u \in I$ 及び整数 $1 \le i < m(u)$ に対し $(x_i/x_{m(u)})u \in I$ を満たす時にいう．明らかに strongly stable イデアルは stable である．単項式イデアル I の単項式からなる極小生成系を $G(I)$ と書くことにする．stable イデアルの graded Betti number は次の形で計算できることが知られている．

Theorem 2.1 (Eliahou–Kervaire [18])**.** もし I が stable イデアルであるなら

$$\beta_{ii+j}(I) = \sum_{u \in G(I),\ \deg(u)=j} \binom{m(u)-1}{i}.$$

Example 2.2. $I = (x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_1^2x_2x_3, x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2)$ とおく．これは次数 4 の単項式で生成される stable イデアルであり (これは strongly stable ではない)，$m(u) = 1$ となる生成元を 1 つ，$m(u) = 2$ となる生成元を 3 つ，$m(u) = 3$ となる生成元を 3 つ持つ．Eliahou–Kervaire の公式を使えば，

$$\begin{aligned}
\beta_{04}(I) &= \binom{0}{0} + 3\binom{1}{0} + 3\binom{2}{0} = 7,\\
\beta_{15}(I) &= \binom{0}{1} + 3\binom{1}{1} + 3\binom{2}{1} = 9,\\
\beta_{26}(I) &= \binom{0}{2} + 3\binom{1}{2} + 3\binom{2}{2} = 3
\end{aligned}$$

となり，その他の $\beta_{ij}(I)$ は 0 である． Eliahou–Kervaire の公式は Betti diagram (i 列 j 行目に β_{ii+j} の値を入れた表) と相性が良い．例えば上のイデアルの場合 Betti diagram は次のようになる．

	0	1	2	3
$\vdots$	-	-	-	-
4	7	9	3	-
$\vdots$	-	-	-	-

次に次数逆辞書式順序の generic initial ideal を取ることでイデアルのどのような性質が保たれるかについて述べる．斉次イデアル $I \subset S$ に対し，$\mathrm{gin}(I)$ を I の次数逆辞書式順所に関する generic initial ideal とする．有限生成次数付 S-加群 M に対し，

$$\mathrm{pd}(M) = \max\{i : \beta_{ij}(M) \neq 0 \text{ for some } j\}$$

を M の **projective dimension**,

$$\mathrm{reg}(M) = \max\{j : \beta_{ii+j}(M) \neq 0 \text{ for some } i\}$$

を M の **(Castelnuovo–Mumford) regularity** と呼ぶ.

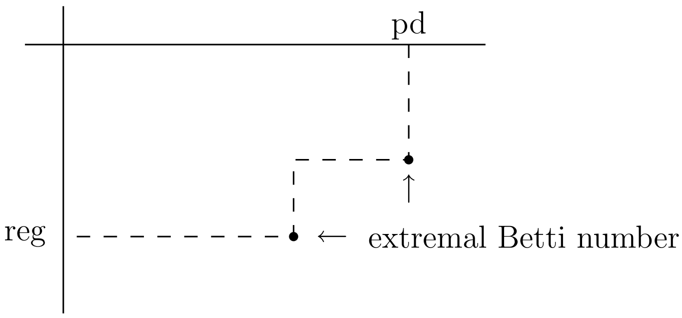
Theorem 2.3 (Bayer–Stillman)**.** $I \subset S$ を斉次イデアルとする.

(i) $\mathrm{pd}(S/I) = \mathrm{pd}(S/\mathrm{gin}(I))$;
(ii) S/I が Cohen–Macaulay $\quad\Leftrightarrow\quad$ $S/\mathrm{gin}(I)$ が Cohen–Macaulay;
(iii) $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(\mathrm{gin}(I))$.

上の定理の更なる一般化も Bayer, Charalambous, Popescu [9] らによって証明されている. 有限生成次数付 S-加群 M に対し, $\beta_{ii+j}(M)$ が M の **extremal Betti number** であるとは, $p \geq i$ 及び $q \geq j$ を満たし $(p,q) \neq (i,j)$ となる全ての p,q に対し $\beta_{pp+q}(M) = 0$ を満たす時にいう.

Theorem 2.4 (Bayer–Charalambous–Popescu)**.** 任意の斉次イデアル $I \subset S$ に対し, $\beta_{ii+j}(I)$ が I の extremal Betti number なら $\beta_{ii+j}(\mathrm{gin}(I))$ は $\mathrm{gin}(I)$ の extremal Betti number であり, かつ $\beta_{ii+j}(I) = \beta_{ii+j}(\mathrm{gin}(I))$ が成り立つ.

regularity や extremal Betti number といった概念は Betti diagram を使うことで理解は易しくなる. 実際, Betti diagram に於いて, projective dimension は横の長さ, regularity は縦の長さ, extremal Betti number は自身より右下にあるものが全て 0 となる箇所である. 下のような図をイメージすると良い.



Example 2.5. もちろん, イニシャルイデアルを取るだけでは Theorem 2.3 や 2.4 は成り立たない. (一般には $\beta_{ij}(I) \leq \beta_{ij}(\mathrm{in}_\sigma(I))$ であるから $\mathrm{pd}(S/I) \leq \mathrm{pd}(S/\mathrm{in}_\sigma(I))$ かつ $\mathrm{reg}(I) \leq \mathrm{reg}(\mathrm{in}_\sigma(I))$ である.)

例えばイデアル $I = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3 + x_2x_3)$ を考える. この時, 辞書式順序 $<_{\mathrm{lex}}$ で $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(I) = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2x_3)$ であり, 一方 $\mathrm{gin}(I) = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ である. Betti diagram を考えてみると以下のようになる.

$$
I : \quad \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \vdots & - & - & - & - \\ 2 & 3 & 2 & - & - \\ \vdots & - & - & - & - \end{array}
\qquad
\mathrm{gin}(I) : \quad \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \vdots & - & - & - & - \\ 2 & 3 & 2 & - & - \\ \vdots & - & - & - & - \end{array}
\qquad
\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(I) : \quad \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \vdots & - & - & - & - \\ 2 & 3 & 3 & 1 & - \\ 3 & 1 & 1 & - & - \\ \vdots & - & - & - & - \end{array}
$$

すると上のイデアル I に対しては, $\mathrm{pd}(S/I) = \mathrm{pd}(S/\mathrm{gin}(I)) < \mathrm{pd}(S/\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(I))$ かつ $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(\mathrm{gin}(I)) < \mathrm{reg}(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(I))$ となっていることが分かる.

Remark 2.6. generic initial ideal を考える際には次数逆辞書式順序を考えることが殆どである. その理由は, 次数逆辞書式でない場合には Theorem 2.3 や 2.4 が成り立たないかもしれないからである. また, 次数逆辞書式順序が最も良い順序であるという理論的な保証もある. 後述の Conca の結果 (Corollary 6.3) を見よ.

3. Generic initial ideals in an exterior algebra

この節では, 外積代数上の generic initial ideal について考える. K を無限体, V を基底 $e_1, \dots, e_n$ を持つ体 K 上のベクトル空間, $E = \bigwedge^\bullet V$ を V の外積代数とする. 部分集合 $F = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ に対し $e_F = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \in E$ を E の次数 k の**単項式**という, 但し $i_1 < \cdots < i_k$ とする.

外積代数上においても, 単項式順序, グレブナー基底, イニシャルイデアル等は多項式環の場合と同様に定義できる (詳しくは [3] を見よ). 本稿では単項式順序は多項式環上の単項式順序を自然に外積代数上に制限したものだけを考えることにする. 外積代数上での generic initial ideal も多項式環の場合と全く同様に定義することが出来る.

Theorem 3.1 (Aramova–Herzog–Hibi [3])**.** 単項式順序 $<_\sigma$ を固定する. 任意の斉次イデアル $J \subset E$ に対しある空でないザリスキー開集合 $U \subset GL_n(K)$ が存在し, 任意の $\varphi \in U$ に対し $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(J))$ は一定となり, かつ U は上三角行列全体の集合と交わる.

上で定まるの単項式イデアル $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(J))$ を J の単項式順序 $<_\sigma$ に関する generic initial ideal と呼び, $\mathrm{Gin}_\sigma(J)$ と書く. 特に, 次数逆辞書式順序の generic initial ideal を単に $\mathrm{Gin}(J)$ と書くことにする. (Macaulay2 は外積代数が扱えるので, 外積代数上の generic initial ideal もランダム行列を取ることで計算可能である. 詳しくは [22] を見よ.)

外積代数上においても, 全ての generic initial ideal は Borel-fixed となることは多項式環の場合と同様に証明できる. 特に, 外積代数上では全ての単項式は squarefree であるから Borel-fixed 性は体の標数には依存しない. 単項式イデアル $J \subset E$ が **strongly stable** であるとは任意の単項式 $e_F \in J$ 及び $i < j \in F$, $i \notin F$ に対し $e_{(F \setminus \{j\}) \cup \{i\}} \in J$ を満たす時にいう.

Theorem 3.2 (Aramova–Herzog–Hibi [3])**.** 単項式順序 $<_\sigma$ が $e_1 >_\sigma \cdots >_\sigma e_n$ を満たすとする. 任意の斉次イデアル $J \subset E$ に対し $\mathrm{Gin}_\sigma(J)$ は strongly stable.

次に気になるのは generic initial ideal と graded Betti number との関係である. 有限生成次数付両側 E-加群 M に対し, $\beta_{ij}(M)$ を M の外積代数上での graded Betti number とする, つまり $\beta_{ij}(M) = \dim_K \mathrm{Tor}_i^E(M, K)_j$ である. 単項式イデアル $J \subset E$ が **stable** であるとは $e_F \in I$, $i < \max F$, $i \notin F$ なら $e_{(F \setminus \max F) \cup \{i\}} \in I$ を満たす時にいう. 外積代数上での stable イデアルの graded Betti number は次の形で計算できることが知られている ([3, Corollary 3.3]).

Theorem 3.3 (Aramova–Herzog–Hibi)**.** $J \subset E$ を stable イデアルとする. 任意の i, j に対し

$$\beta_{ii+j}(J) = \sum_{e_F \in G(J),\ \deg e_F = j} \binom{\max F + i - 1}{i}.$$

外積代数上では自由加群でない限り加群の次数付自由分解の長さは無限である. よって, projective dimension や extremal Betti number を考えることに意味はない. しかし, regularity に関しては多項式環と全く同様に定義でき, 良い意味を持つ. 次のことが知られている.

Theorem 3.4 (Aramova–Herzog [2, Theorem 5.1])**.** 任意の斉次イデアル $J \subset E$ に対し $\mathrm{reg}(J) = \mathrm{reg}(\mathrm{Gin}(J))$.

最後に外積代数上の単項式イデアルの graded Betti number と多項式環上の squarefree 単項式イデアルの graded Betti number の関係について述べておく. 外積代数上の単項式は全て squarefree であるから, 任意の単項式イデアル $J \subset E$ に対し, $G(I) = \{x_F : e_F \in G(J)\}$ となるような多項式環 S 上の squarefree 単項式イデアル I が一意的に存在する (但し, $F = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [n]$ に対し $x_F = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ とする). この時次が成り立つ.

Theorem 3.5 (Aramova–Avramov–Herzog [1])**.**

$$\sum_i \sum_j \beta_{ij}(E/J) t^i s^j = \sum_i \sum_j \beta_{ij}(S/I) \frac{t^i s^j}{(1-ts)^j}.$$

但し $\beta_{ij}(E/J) = \dim_K \mathrm{Tor}_i^E(E/J, K)_j$ で $\beta_{ij}(S/I) = \dim_K \mathrm{Tor}_i^S(S/I, K)_j$ とする.

多項式環 S 上の squarefree 単項式イデアル I が **squarefree strongly stable** であるとは $x_F \in I$ なら $j \in F$ かつ $i \notin F$ なる任意の $1 \le i < j \le n$ に対し $x_{(F \setminus \{j\}) \cup \{i\}} \in I$ を満たす時にいう. 言い換えるなら, 対応する外積代数上の単項式イデアルが strongly stable であるような squarefree 単項式イデアルを squarefree strongly stable であるという. 次の主張は Theorem 3.3 と 3.5 より直ちに従う.

Corollary 3.6 (Aramova–Herzog–Hibi [4, Theorem 2.1])**.** $I \subset S$ を squarefree strongly stable イデアルとする. 任意の i, j に対し

$$\beta_{ii+j}(I) = \sum_{u \in G(I),\ \deg(u) = j} \binom{m(u) - j}{i}.$$

4. Shifting operations

この節では shifting operation の定義を与え, combinatorial shifting, exterior shifting, symmetric shifting の 3 つの shifting operation を導入する. Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする. つまり Γ は次の (i) 及び (ii) を満たす $[n]$ の部分集合の族である: (i) $F \in \Gamma$ かつ $G \subset F$ なら $G \in \Gamma$. (ii) 各 $i = 1, \dots, n$ に対し $\{i\} \in \Gamma$. 各 $k = 1, 2, \dots, n$ に対し, $f_{k-1}(\Gamma)$ で $|F| = k$ なる元 $F \in \Gamma$ の個数を表すとする. 単体的複体 Γ の **f-vector** とはベクトル $f(\Gamma) = (f_0(\Gamma), \dots, f_{d-1}(\Gamma))$ のことである, 但し $d = \max\{k : f_{k-1}(\Gamma) \neq 0\}$. 単体的複体 Γ が **shifted** であるとは, 任意の $F \in \Gamma$ 及び $1 \le i < j \le n$ に対し $i \in F$ なら $(F \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \Gamma$ を満たす時にいう. (よって単体的複体が shifted であることとその Stanley–Reisner イデアルが squarefree strongly stable であることは同値である.)

Definition 4.1. $\mathcal{B}$ を $[n]$ 上の単体的複体全体の集合とする. **shifting operation** とは, 以下の (S1)–(S4) の性質を満たす写像 $\Delta(\text{-}) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ のことである.

(S1) $\Delta(\Gamma)$ は shifted;
(S2) Γ が shifted なら $\Delta(\Gamma) = \Gamma$;
(S3) Γ と $\Delta(\Gamma)$ は同じ f-vector を持つ;
(S4) $\Gamma \subset \Gamma'$ なら $\Delta(\Gamma) \subset \Delta(\Gamma')$.

ここでは 3 つの shifting operation を紹介する. 初めに, 純粋に組合せ論的な観点から導入された combinatorial shifting を紹介する.

Combinatorial shifting. Γ を $[n]$ 上の単体的複体, $1 \leq i < j \leq n$ を整数とする. $[n]$ の部分集合の族 $\mathrm{Shift}_{ij}(\Gamma) = \{C_{ij}(F) \subset [n] : F \in \Gamma\}$ を次で定義する.

$$C_{ij}(F) = \begin{cases} (F \setminus \{i\}) \bigcup \{j\}, & i \in F,\ j \notin F \text{ かつ } (F \setminus \{i\}) \bigcup \{j\} \notin \Gamma \text{ の場合}, \\ F, & \text{上記以外の場合}. \end{cases}$$

この $\mathrm{Shift}_{ij}(\Gamma)$ が確かに単体的複体になっていることは簡単にチェックできる. また $\mathrm{Shift}_{ij} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は Γ をより shifted なものに近付ける写像であるから, ある整数の組の列 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_q, j_q)$ (但し, 全ての k に対し $1 \leq i_k < j_k \leq n$ とする) が存在し,

$$\mathrm{Shift}_{i_q j_q}(\cdots(\mathrm{Shift}_{i_2 j_2}(\mathrm{Shift}_{i_1 j_1}(\Gamma)))\cdots)$$

は shifted となる. この手法で作られる shifted な単体的複体を Γ の **combinatorial shifted complex** と呼び, $\Delta^c(\Gamma)$ と書く. Γ から $\Delta^c(\Gamma)$ を作る作用 $\Gamma \mapsto \Delta^c(\Gamma)$ を **combinatorial shifting** と呼ぶ.

もちろん $\Delta^c(\Gamma)$ は整数の組 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_q, j_q)$ の取り方に依存する為, Γ から一意的に定まるわけではない. つまり combinatorial shifting は写像ではない. しかし整数の組の列 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_q, j_q)$ を十分長く取っておけば写像と見ることもでき, またそのように見た時には明らかに (S1)–(S4) を満たすので combinatorial shifting も shifting operation の一つと見なされる.

Exterior algebraic shifting. 次に exterior algebraic shifting を紹介する. 簡単に言うと, exterior algebraic shifting は外積代数上の generic initial ideal を使って定義される shifting operation である. 正確には次のように定義する. $[n]$ 上の単体的複体 Γ の **exterior face ideal** J_Γ とは $F \notin \Gamma$ なる単項式 $e_F \in E$ 全体で生成される外積代数上の単項式イデアルである. **exterior algebraic shifting** (以下 exterior shifting とする) とは

$$J_{\Delta^e(\Gamma)} = \mathrm{Gin}(J_\Gamma)$$

で定義される写像 $\Delta^e(\text{-}) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ である. exterior shifting が確かに shifting operation になっていることは簡単にチェックできる. 実際 (S1) は Theorem 3.2 から直ちに従い, (S2)–(S4) は Lemma 1.8 から従う. exterior shifting は体の標数に依存することを注意しておく (例えば射影平面の三角形分割を考えよ).

Symmetric algebraic shifting. 最後に多項式環上の generic initial ideal を考えることで定義される symmetric algebraic shifting を紹介する. ここでは [5] に従って定義する. $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を標数 0 の体 K 上の多項式環とする. $\mathcal{M}$ を無限個の変数 $x_1, x_2, \ldots$ 上の単項式全体の集合とする. **Squarefree operation** $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ とは, 単項式 $u = x_{i_1} \cdots x_{i_k} \in \mathcal{M}$ に対し,

$$\Phi(u) = x_{i_1} x_{i_2+1} x_{i_3+2} \cdots x_{i_k+k-1}$$

で定義される写像である, 但し $i_1 \le \cdots \le i_k$ とする. I が S 上の単項式イデアルで, 任意の $u \in G(I)$ に対し $\Phi(u) \in S$ を満たす時, $\Phi(I)$ で $\{\Phi(u) : u \in G(I)\}$ で生成される S のイデアルを表すことにする. この時次のことがわかる.

Lemma 4.2. 体 K の標数は 0 であるとする. $I \subset S$ が squarefree 単項式イデアル なら任意の $u \in G(\mathrm{gin}(I))$ に対し $\Phi(u) \in S$.

Proof. I は squarefree 単項式イデアルなので, 任意の $j > n$ に対し $\beta_{ij}(I) = 0$ である. (これは良く知られた事実である. 例えば Taylor resolution を考えよ.) すると Theorem 2.4 より任意の $j > n$ に対し $\beta_{ij}(\mathrm{gin}(I)) = 0$ を得る. 今 $\mathrm{gin}(I)$ は strongly stable であるので Eliahou–Kervaire の公式より, 任意の生成元 $u \in G(\mathrm{gin}(I))$ は $m(u) \le n - \deg u + 1$ を満たす. すると squarefree operation の定義から, 任意の $u \in G(\mathrm{gin}(I))$ に対し $m(\Phi(u)) = m(u) + \deg u - 1 \le n$ となり $\Phi(u) \in S$ を得る. □

上の補題から, $[n]$ 上の任意の単体的複体 Γ に対し, 単体的複体 $\Delta^s(\Gamma)$ を次の式で定義することができる

$$I_{\Delta^s(\Gamma)} = \Phi(\mathrm{gin}(I_\Gamma)).$$

但し I_Γ は Γ の Stanley–Reisner イデアルとする. (つまり I_Γ は $F \notin \Gamma$ なる $x_F \in S$ 全体で生成される単項式イデアルである.) 写像 $\Delta^s(\text{-}) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を **symmetric algebraic shifting** (以下 symmetric shifting) と呼ぶ. symmetric shifting が shifting operation であることを示すのはそれほど易しくない. ここでは (S1), (S3), (S4) についてのみ証明の概略を与える. (詳しくは [5] や [23] を見よ. また (S2) については [8] に簡単な証明が与えられていることも記しておく.) 初めに次を示す.

Lemma 4.3 (Aramova–Herzog–Hibi [5]). イデアル $I \subset J$ を, 任意の $u \in G(I)$ 及び $v \in G(J)$ に対し $\Phi(u) \in S$ 及び $\Phi(v) \in S$ を満たす S 上の strongly stable イデアルとする. この時次が成り立つ.

(i) $\Phi(I)$ は squarefree strongly stable;
(ii) I と $\Phi(I)$ は同じ graded Betti number を持つ;
(iii) $\Phi(I) \subset \Phi(J)$.

Proof. (i) を示すには $x_F \in G(\Phi(I))$ で $1 \le i < j \le n$ が $i \notin F$ かつ $j \in F$ を満たすなら $x_{(F\setminus\{j\})\cup\{i\}} \in \Phi(I)$ を示せば十分.

$\Phi^{-1}(x_F) = x_{i_1}\cdots x_{i_k}$, $\Phi^{-1}(x_{(F\setminus\{j\})\cup\{i\}}) = x_{j_1}\cdots x_{j_k}$ とおく, 但し $i_1 \le \cdots \le i_k$ かつ $j_1 \le \cdots \le j_k$ とする. 明らかに $s = 1, 2, \ldots, k$ について $j_s \le i_s$ が成り立つ. すると I は strongly stable で $\Phi^{-1}(x_F) \in I$ なので $x_{j_1}\cdots x_{j_k} \in I$ である. よって $x_{j_1}\cdots x_{j_k}$ を割り切るような単項式 $w \in G(I)$ が存在するが, 今 I は strongly stable なので, ある $k' \le k$ があって $w = x_{j_1}\cdots x_{j_{k'}}$ として良い. squarefree operation の定義から, 明らかに $\Phi(w) \in G(\Phi(I))$ は $x_{(F\setminus\{j\})\cup\{i\}}$ を割り切るので $x_{(F\setminus\{j\})\cup\{i\}} \in \Phi(I)$ を得る.

(ii) は (i) と Theorem 2.1 及び Corollary 3.6 より容易に従う. 最後に (iii) を示す. $x_F \in \Phi(I)$ として $x_F \in \Phi(J)$ を示せば良い. $\Phi^{-1}(x_F) = x_{i_1}\cdots x_{i_k}$, 但し $i_1 \le \cdots \le i_k$, とする. $\Phi^{-1}(x_F) \in I \subset J$ で J は strongly stable なので, (i) と同様にして, ある $k' \le k$ が存在し $x_{i_1}\cdots x_{i_{k'}} \in G(J)$ が $\Phi^{-1}(x_F)$ を割り切ることがわかる. すると $\Phi(x_{i_1}\cdots x_{i_{k'}}) \in G(\Phi(J))$ は x_F を割り切るので $x_F \in \Phi(J)$ を得る. □

Corollary 4.4. 体 K の標数は 0 であるとする. 写像 $\Delta^s(\text{-}) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は (S1), (S3), (S4) を満たす. 更に $I_{\Delta^s(\Gamma)}$ は $\mathrm{gin}(I_\Gamma)$ と同じ graded Betti number を持つ.

Proof. (S1) は Theorem 1.3 と Lemma 4.3 (i) より従う．また Lemma 4.3 (ii) より $I_{\Delta^s(\Gamma)} = \Phi(\mathrm{gin}(I_\Gamma))$ と $\mathrm{gin}(I_\Gamma)$ は同じ graded Betti number を持つ．特に $I_{\Delta^s(\Gamma)}$ と I_Γ は同じヒルベルト関を持つので (S3) が従う．最後に (S4) は Lemma 1.8 (iii) と Lemma 4.3 (iii) より直ちに従う． □

Remark 4.5. 上では次数逆辞書式順序だけを考えているが, もちろん exterior shifting は任意の単項式順序で定義することもできる．しかしながら, 次数逆辞書式順序以外の順序では後で紹介するような代数的に良い性質は得られない．また, symmetric shifting は次数逆辞書式順序でない generic initial ideal を使ってもうまく定義することは出来ない．これは一般の順序では Lemma 4.2 が成り立たないからである．(もう少し細かい洞察が [8] でなされている.)

さて上で 3 つの shifting operation を紹介した．ここで各 operation の性質についてもう少し触れておく．combinatorial shifting は Eröds, Ko, Rado [19] らにより導入された概念で, combinatorial shifting を取ることでどのような変化が起こるのかは理解しやすい．しかし, 代数的に見るならばあまり良い性質は持たないであろうことは明らかである．他方 exterior shifting と symmetric shifting は Kalai [25, 28] により導入された．定義からもわかる通り, generic initial ideal を取るわけであるから, これ等の operation を取ることで単体的複体がどのように変化するかを直感的に理解するのは困難である．反面, 代数的には第 2 節や第 3 節で見たような非常に良い性質が成り立つ．以下で algebraic shifting が満たす良い性質を幾つか紹介する．次の定理は Theorem 2.4 の exterior shifting への拡張である．

Theorem 4.6 (Aramova–Herzog [2, Theorem 9.7])**.** Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする．$\beta_{ij}(I_\Gamma)$ が I_Γ の extremal Betti number なら $\beta_{ij}(I_{\Delta^e(\Gamma)})$ は $I_{\Delta^e(\Gamma)}$ の extremal Betti number であり, $\beta_{ij}(I_\Gamma) = \beta_{ij}(I_{\Delta^e(\Gamma)})$.

上の定理から以下のことが成り立つことも直ちにわかる．

Theorem 4.7 (Kalai)**.** Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする．

(i) $\mathrm{depth}(S/I_\Gamma) = \mathrm{depth}(S/I_{\Delta^e(\Gamma)})$;
(ii) Γ が Cohen–Macaulay $\Leftrightarrow$ $\Delta^e(\Gamma)$ が Cohen–Macaulay;
(iii) $\mathrm{reg}(I_\Gamma) = \mathrm{reg}(I_{\Delta^e(\Gamma)})$.

Theorem 4.8 (Kalai)**.** Γ を $[n]$ 上の単体的複体とし, $\tilde{H}_k(\Gamma; K)$ を体 K 上の Γ の k-th reduced homology group とする．任意の k に対し

$$\dim_K \tilde{H}_k(\Gamma; K) = \dim_K \tilde{H}_k(\Delta^e(\Gamma); K).$$

Theorem 4.8 については, Hochster の公式 [13, Theorem 5.5.1] より $\beta_{in}(I_\Gamma) = \dim_K \tilde{H}_{i-2}(\Gamma; K)$ は I_Γ の extremal Betti number であることより従う．また, Theorem 2.4 と Corollary 4.4 から, 上記の性質は全て (標数が 0 であるような体の上で) symmetric shifting でも成り立つことも直ぐにわかる．

補足：組合せ論に於ける algebraic shifting の有効性. algebraic shifting は単体的複体の f-vector の特徴付けに関する問題で非常に大きな貢献をしてきた．例えば Kalai [25, 26] は Theorem 4.7 (iii) を使って, Leray complex ($\mathrm{reg}(I_\Gamma) \leq q$ なる単体的複体 Γ を $(q-1)$-Leray complex と呼ぶ) の f-vector の特徴付けを行った．また Theorem 4.8

はacyclicな単体的複体の f-vectorの特徴付け (Kalai [27]), さらにreduced homology groupの次元を固定した時の単体的複体の f-vectorの特徴付け (Björner–Kalai [12]) に使われた．また最近の結果としては $\mathrm{depth}(S/I_\Gamma) \leq q$ なる単体的複体のreduced homology groupの次元を固定した時の f-vectorの特徴付け (Björner [11]) 等にも使われている．

5. Shifting operations and graded Betti numbers

この節ではshifting operationとgraded Betti numberに関するAramova–Herzog–Hibiの予想とそれに関する最近の結果について紹介する．

shifting operationに関する興味深い問題の一つは, operation同士の関係を調べること, 特に, Δ^c, Δ^e, Δ^s の間にどのような関係が成り立つかを調べることである．このうち Δ^c と Δ^e に関してはかなり良い関係がわかっている (後述のTheorem 5.4及び第6節を見よ)．他方, Δ^s とその他のoperationとの関係については殆ど何もわかっていない．上のような問題を考える利点は, もちろん, 考え易いoperationから別のoperationを考えることが出来るからである．(例えば, [30] では Δ^c を使ってcyclic polytopeの境界複体のexterior shiftingが計算されている.) 上記の問題を考える上での一つの興味深い問題はAramova–Herzog–Hibiによる次の予想である．(exterior shiftingとsymmetric shiftingの関係に関する予想は他にも幾つかある．[7] や [29] を見よ.)

Conjecture 5.1 (Aramova–Herzog–Hibi [5])**.** Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする. 任意の整数 i, j について

$$\beta_{ij}(I_\Gamma) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^s(\Gamma)}) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^e(\Gamma)}) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^c(\Gamma)}).$$

Conjecture 5.1の初めの不等式については殆ど明らかである．実際次の定理はCorollary 4.4から直ちに従う．

Theorem 5.2 (Aramova–Herzog–Hibi)**.** 体 K の標数は 0 であるとし, Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする．任意の整数 i, j について

$$\beta_{ij}(I_\Gamma) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^s(\Gamma)}).$$

ところで体 K の標数が 0 であることを仮定しなければならないことはsymmetric shiftingを考える際にしばしば問題となる．一般の正標数の場合にsymmetric shiftingを定義できないか？と考えるのは自然なことであろう．このことについて次のような問題がHerzog [23], Kalai [29] らによって提唱されている．

Problem 5.3 (Herzog, Kalai)**.** $\mathrm{char}(K) = p > 0$ とする．I がsquarefree 単項式イデアルなら $\mathrm{gin}(I)$ はstrongly stableか? もっと一般に, I が単項式イデアルで, 任意の $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in G(I)$ が $a_k < p$ を満たすなら, $\mathrm{gin}(I)$ はstrongly stableか？

上の問題はsymmetric shiftingが正標数の場合に定義できるかというだけでなく, 正標数の体上の多項式環でgeneric initial idealを考える際に非常に有効な手段となるであろう．(但し, $p > n$ の時は p-Borel性からsquarefree単項式イデアルのgeneric initial idealはstrongly stableであることを注意しておく.)

さてConjecture 5.1に関してもう一つ知られているのはexterior shiftingとcombinatorial shiftingの関係である．

Theorem 5.4 (M–Hibi [34])**.** Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする．任意の整数 i,j 及び Γ の任意の combinatorial shifted complex $\Delta^c(\Gamma)$ に対し

$$\beta_{ij}(I_{\Delta^e(\Gamma)}) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^c(\Gamma)}).$$

上の定理の証明は次の節で与えることにする．Conjecture 5.1 の Δ^e と Δ^s の関係については依然として解決されていない．実際, exterior shifting と symmetric shifting が異なるような単体的複体を探すことさえ容易ではない．(大きさ 3,3 の完全二部グラフがそのような例である．[29] もしくは [32] を見よ.) また, 当然 Γ と $\Delta^e(\Gamma)$ 及び Γ と $\Delta^c(\Gamma)$ の間の直接の関係に関しても問題となるが, Γ と $\Delta^c(\Gamma)$ の間の関係については次のことがわかっている．

Theorem 5.5 (M–Hibi [34])**.** Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする．任意の整数 i,j に対し

$$\beta_{ij}(I_\Gamma) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^c(\Gamma)}).$$

Theorem 5.5 の証明は Hochster の公式と combinatorial shifting の性質を使った簡単なものであるが, ここでは割愛する．他方 Γ と $\Delta^e(\Gamma)$ の間にも同様の関係が成り立つことが予想されているが, こちらは未解決である．わかっているのは $\beta_{0,j}(I_\Gamma) \leq \beta_{0,j}(I_{\Delta^e(\Gamma)})$ のみである (但し $i=0$ の場合は任意の shifting operation でこの関係式が成り立つ事が [35] で示されている)．もっと一般に次のような問題を考えるのも興味深いであろう．

Problem 5.6. 単項式順序 $<_\sigma$ を固定する．単体的複体 Γ 及び $\varphi \in GL_n(K)$ に対し単体的複体 $\Delta^\varphi_\sigma(\Gamma)$ を $J_{\Delta^\varphi_\sigma(\Gamma)} = \mathrm{in}_\sigma(\varphi(J_\Gamma))$ で定めた時, 任意の整数 i,j に対して $\beta_{ij}(I_\Gamma) \leq \beta_{ij}(I_{\Delta^\varphi_\sigma(\Gamma)})$ が成り立つか?

Remark 5.7. 一般に E 上の斉次イデアル J に対し $\beta_{ij}(J) \leq \beta_{ij}(\mathrm{in}_\sigma(J))$ であるから, 少なくとも $\beta_{ij}(J_\Gamma) \leq \beta_{ij}(J_{\Delta^e(\Gamma)})$ は正しい．しかし問題となっているのは, 多項式環上のイデアルとして見た時の graded Betti number である．また Theorem 3.5 から, $[n]$ 上の単体的複体 Γ と Σ が任意の i,j に対し $\beta_{ij}(I_\Gamma) \leq \beta_{ij}(I_\Sigma)$ を満たすなら任意の i,j に対し $\beta_{ij}(J_\Gamma) \leq \beta_{ij}(J_\Sigma)$ が成り立つが, 逆の事実は必ずしも正しくない．

6. Comparing the graded Betti numbers of strongly stable ideals

この節では strongly stable イデアルの graded Betti number の比較という観点から導かれる幾つかの結果を紹介し, 最後に Theorem 5.4 の証明を与える．strongly stable イデアルの graded Betti number の比較という手法を初めに用いたのは Bigatti [10] と Hulett [24] である．彼らは次のように Eliahou–Kervaire の公式を変形した．多項式環 S 上の単項式イデアル I に対し,

$$m_{\leq k}(I,d) = |\{u \in I : u \text{ は } m(u) \leq k \text{ を満たす次数 } d \text{ の単項式 }\}|$$

とおく．今 I は strongly stable であるとして, Eliahou–Kervaire の公式を上手く変形すると以下の式を得る ([10] もしくは [24] を見よ).

$$\begin{aligned}\beta_{ii+j}(I) &= \dim_K I_j \binom{n-1}{i} \\ &\quad - \sum_{q=i}^{n-1} m_{\leq q}(I,j)\binom{q-1}{i-1} - \sum_{q=i+1}^{n} m_{\leq q}(I,j-1)\binom{q-1}{i}.\end{aligned}$$

上の式から次のことがわかる.

Lemma 6.1. I と J を同じヒルベルト関数を持つ S 上の strongly stable イデアルとする. 任意の k,d に対して $m_{\leq k}(I,d) \geq m_{\leq k}(J,d)$ が成り立つなら, 任意の i,j に対して $\beta_{ij}(I) \leq \beta_{ij}(J)$ が成り立つ.

Lemma 6.1 の有効性は graded Betti number の比較という問題を $m_{\leq k}(I,d)$ の比較と言う単項式の数え上げの問題に帰着できる所にある. Bigatti と Hullet はこの事実を使い lexsegment ideal ([10] 等を見よ) が同じヒルベルト関数を持つ斉次イデアルの中で最大の graded Betti number を持つことを体の標数が 0 である場合に示した (正標数の場合も後に Pardue [38] によって証明が与えられた). ここでは Lemma 6.1 の別の応用として, 異なる単項式順序の generic initial ideal の graded Betti number を比較した Conca の結果を紹介する.

Theorem 6.2 (Conca [15, Proposition 1.6])**.** $<_\sigma$ を単項式順序とする. 任意の斉次イデアル $I \subset S$ 及び任意の整数 k,d に対し

$$m_{\leq k}(\mathrm{gin}(I),d) \geq m_{\leq k}(\mathrm{gin}(\mathrm{in}_\sigma(I)),d).$$

上の定理の証明は多少技巧的であるからここでは省略する. Theorem 6.2 は次の重要な結果を導く.

Corollary 6.3 (Conca [16])**.** 体 K の標数は 0 であるとし, $<_\sigma$ を単項式順序とする. 任意の斉次イデアル $I \subset S$ 及び任意の整数 i,j に対し

$$\beta_{ij}(\mathrm{gin}(I)) \leq \beta_{ij}(\mathrm{gin}_\sigma(I)).$$

Proof. 行列 $\varphi \in GL_n(K)$ が $\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I)) = \mathrm{gin}_\sigma(I)$ を満たすとする. Lemma 1.8 (iv) より $\mathrm{gin}(\varphi(I)) = \mathrm{gin}(I)$ であり, また Lemma 1.8 (ii) より

$$\mathrm{gin}(\mathrm{in}_\sigma(\varphi(I))) = \mathrm{gin}(\mathrm{gin}_\sigma(I)) = \mathrm{gin}_\sigma(I)$$

である. よって Theorem 6.2 より任意の k,d に対して

$$m_{\leq k}(\mathrm{gin}(I),d) \geq m_{\leq k}(\mathrm{gin}_\sigma(I),d)$$

が成り立つ. すると主張は Lemma 6.1 より従う. □

上の Corollary は, generic initial ideal を考える際には, graded Betti number という観点からは, 次数逆辞書式順序を考えるのが最も良いことを理論的に保証している. ところで上で見た結果は外積代数上においても全く同様に成り立つ. 実際, J を E 上の strongly stable イデアルとし,

$$m_{\leq k}(J,d) = |\{e_F \in J : \max F \leq k,\ |F| = d\}|$$

とおくと, Theorem 3.3 は

$$\begin{aligned}\beta_{ii+j}(J) &= \dim_K J_j \binom{n+i-1}{i} \\ &\quad - \sum_{q=j}^{n-1} m_{\leq q}(J,j)\binom{q+i-1}{i-1} - \sum_{q=j}^{n} m_{\leq q-1}(J,j-1)\binom{q+i-1}{i}.\end{aligned}$$

のように変形できる．また $I \subset S$ を $G(I)=\{x_F : e_F \in G(J)\}$ となる squarefree strongly stable イデアルとすると, Theorem 3.6 は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\beta_{ii+j}(I) &= \dim_K J_j \binom{n-j}{i} \\ &\quad -\sum_{q=j}^{n-1} m_{\le q}(J,j)\binom{q-j}{i-1} - \sum_{q=j}^{n} m_{\le q-1}(J,j-1)\binom{q-j}{i}.\end{aligned}$$

よって次のことがわかる．

Lemma 6.4. *J, J' を E 上の strongly stable イデアル, I, I' をそれぞれ $\{x_F : e_F \in G(J)\}$ 及び $\{x_F : e_F \in G(J')\}$ で生成される S の squarefree 単項式イデアルとする．任意の k, d に対して $m_{\le k}(J,d) \ge m_{\le k}(J',d)$ が成り立つなら, 任意の i, j に対して $\beta_{ij}(J) \le \beta_{ij}(J')$ かつ $\beta_{ij}(I) \le \beta_{ij}(I')$ が成り立つ．*

また Theorem 6.2 も外積代数上で同様の事が成り立つ. ([31] で Conca の方法より少し複雑な方法で証明が与えられているが, [15] と全く同じ方法で証明できる.)

Theorem 6.5. *$<_\sigma$ を単項式順序とする．任意の斉次イデアル $J \subset E$ 及び任意の整数 k, d に対し*

$$m_{\le k}(\mathrm{Gin}(J), d) \ge m_{\le k}(\mathrm{Gin}(\mathrm{in}_\sigma(J)), d).$$

Corollary 6.6 (Nagel–Römer–Vinai [35])**.** *$<_\sigma$ を単項式順序とする．任意の斉次イデアル $J \subset S$ 及び任意の整数 i, j に対し*

$$\beta_{ij}(\mathrm{Gin}(J)) \le \beta_{ij}(\mathrm{Gin}_\sigma(J)).$$

更に, $I \subset S$ を $\{x_F : e_F \in G(\mathrm{Gin}(J))\}$ で生成される S のイデアル, I' を $\{x_F : e_F \in G(\mathrm{Gin}_\sigma(J))\}$ で生成される S のイデアルとすると, 任意の i, j に対し $\beta_{ij}(I) \le \beta_{ij}(I')$.

さて, 最後に Theorem 5.4 の証明を与える．combinatorial shifting は代数的には次のように見ることが出来る (証明は容易なので読者に委ねる).

Lemma 6.7. *整数 $1 \le i < j \le n$ を固定し, $\varphi_{i,j} \in GL_n(K)$ を, $k \ne j$ の時 $\varphi_{i,j}(e_k) = e_k$ とし $k = j$ の時 $\varphi_{i,j}(e_j) = e_i + e_j$ と移すような行列とする．また Γ を $[n]$ 上の単体的複体とする．この時 (任意の単項式順序 $<_\sigma$ に対し) $\mathrm{in}_\sigma(\varphi_{i,j}(J_\Gamma)) = J_{\mathrm{Shift}_{ij}(\Gamma)}$.*

Proof of Theorem 5.4. $\Delta^c(\Gamma) = \mathrm{Shift}_{i_p j_p}(\cdots(\mathrm{Shift}_{i_1 j_1}(\Gamma))\cdots)$ となっているとする．Theorem 6.5 と Lemma 6.7 より, 任意の k, d に対して

$$\begin{aligned} m_{\le k}(J_{\Delta^e(\Gamma)}, d) &= m_{\le k}(\mathrm{Gin}(J_\Gamma), d) \\ &\ge m_{\le k}(\mathrm{Gin}(\mathrm{in}(\varphi_{i_1 j_1}(J_\Gamma))), d) \\ &= m_{\le k}(J_{\Delta^e(\mathrm{Shift}_{i_1 j_1}(\Gamma))}, d).\end{aligned}$$

上の不等式を繰り返し用いると, 任意の k, d に対し,

$$m_{\le k}(J_{\Delta^e(\mathrm{Shift}_{i_1 j_1}(\Gamma))}, d) \ge m_{\le k}(J_{\Delta^e(\mathrm{Shift}_{i_2 j_2}(\mathrm{Shift}_{i_1 j_1}(\Gamma)))}, d) \ge \cdots \ge m_{\le k}(J_{\Delta^e(\Delta^c(\Gamma))}, d)$$

となることがわかる．また shifting operation の性質 (S2) より $\Delta^e(\Delta^c(\Gamma)) = \Delta^c(\Gamma)$ なので, 上の式と Lemma 6.4 より主張が従う． □

References

[1] A. Aramova. L.L. Avramov and J. Herzog, Resolutions of monomial ideals and cohomology over exterior algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 579–594.

[2] A. Aramova and J. Herzog, Almost regular sequences and Betti numbers, *Amer. J. Math.* **122** (2000), 689–719.

[3] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Gotzmann theorems for exterior algebras and combinatorics, *J. Alg.* **191** (1997), 174–211.

[4] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Squarefree lexsegment ideals, *Math. Z.* **122** (2000), 353–378.

[5] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Shifting operations and graded Betti numbers, *J. Alg. combin.* **12** (2000), 207–222.

[6] E. Babson and I. Novik, Face numbers and nongeneric initial ideals, *Electron. J. Combin.* **11** (2004/06), no. 2, Research Paper 25, 23 pp.

[7] E. Babson, I. Novik and R. Thomas, Symmetric iterated Betti numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **105** (2004), 233–254

[8] E. Babson, I. Novik and R. Thomas, Reverse lexicographic and lexicographic shifting, *J. Algebraic Combin.* **23** (2006), 107–123.

[9] S. Bayer, H. Charalambous and S. Popescu, Extremal Betti numbers and Applications of monomial ideals, *J. Alg.* **221** (1999), 497–512.

[10] A.M. Bigatti, Upper bound for the Betti numbers of a given Hilbert function, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2317–2334.

[11] A. Björner, Nonpure shellability, f-vectors, subspace arrangements and complexity, *in* "Formal power series and algebraic combinatorics" (L.J. Billera, C. Greene, R. Simion and R.P. Stanley Eds.), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., Vol. 24, 1996, pp. 25–53.

[12] A. Björner and G. Kalai, An extended Euler–Poincarè theorem, *Acta. Math.* **161** (1988), 279–303.

[13] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay rings," Revised Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[14] CoCoA Team. *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra*, Available at `http://cocoa.dima.unige.it`

[15] A. Conca, Reduction numbers and initial ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 1015–1020.

[16] A. Conca, Koszul homology and extremal property of Gin and Lex, *Trans. Amer. Math. Soc.* **256** (2004), 2945–2961.

[17] D. Eisenbud, "Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry", Spriger-Verlag, New York, 1995.

[18] S. Eliahou and M. Kervaire, Minimal resolutions of some monomial ideals, *J. Alg.* **129** (1990), 1–25.

[19] P. Erdös, C. Ko and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **12** (1961), 313–320.

[20] D. Grayson and M. Stillman: Macaulay 2. `http://www.math.unic.edu/Macaulay2/`

[21] M.L. Green, Generic initial ideals, *in* "Six Lectures on Commutative Algebra" (J. Elias, J.M. Giral, R.M. Miró-Roig, and S. Zarzuela, Eds.), Progress in Math., **166**, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 119–186.

[22] M.L. Green and M. Stillman, A tutorial on generic initial ideals, *in* "Gröbner basis and applications," (B. Buchberger and F. Winkler, Eds.), London Math. Soc. Lecture note Ser., **251**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 96–108.

[23] J. Herzog, Generic initial ideals and graded Betti numbers, *in* "Computational Commutative Algebra and Combinatorics" (T. Hibi, Ed.), Adv. Stud. Pure Math., Vol. 33, 2002, pp. 75–120.

[24] H.A. Hulett, Maximum Betti numbers for a given Hilbert function, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2335–2350.
[25] G. Kalai, A characterization of f-vectors of families of convex sets in $\mathbb{R}^d$, Part I: Necessity of Eckhoff's conditions, *Israel J. Math.* **48** (1984), 175–195.
[26] G. Kalai, A characterization of f-vectors of families of convex sets in $\mathbb{R}^d$, Part II: Sufficiency of Eckhoff's conditions, *J. Comb. Theory Ser. A* **41** (1986), 167–188.
[27] G. Kalai, f-vectors of acyclic complexes, *Discrete Math.* **55** (1985), 97–99.
[28] G. Kalai, The diameter of graphs of convex polytopes and f-vector theory, *in* "Applied Geometry and Discrete Mathematics" (P. Gritzmann and B. Sturmfels, Eds.), DIMACS Ser. in Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., Vol. **4**, 1991, pp. 387–411.
[29] G. Kalai, Algebraic shifting, *in* "Computational Commutative Algebra and Combinatorics" (T. Hibi, Ed.), Adv. Stud. Pure Math., Vol. 33, 2002, pp. 121–163.
[30] S. Murai, Algebraic shifting of cyclic polytopes and stacked polytopes, *Discrete Math.* **307** (2007), 1707–1721.
[31] S. Murai, Generic initial ideals and exterior algebraic shifting of the join of simplicial complexes, *Ark. Mat.*, to appear.
[32] S. Murai, Algebraic shifting of finite graphs, *Comm. Algebra*, to appear.
[33] S. Murai, Generic initial ideals and squeezed spheres, *Adv. Math.*, to appear.
[34] S. Murai and T. Hibi, Algebraic shifting and graded Betti numbers, (2006), preprint.
[35] U. Nagel, T. Römer and N.P. Vinai, Algebraic shifting and exterior and symmetric algebra methods, arXiv:math.AC/0512521, (2005), preprint.
[36] E. Nevo, Algebraic shifting and basic constructions on simplicial complexes, *J. Algebraic Combin.* **22** (2005), 411–433.
[37] I. Novik, On face numbers of manifolds with symmetry, *Adv. Math.* **1**92 (2005), 183–208.
[38] K. Pardue, Deformation classes of graded modules and maximal Betti numbers. *Illinois J. Math.* **40** (1995), 564–585.

Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan,
E-mail address: `s-murai@ist.osaka-u.ac.jp`