ON FACE VECTORS OF SIMPLICIAL POSETS

山口大学大学院理工学研究科　　村井　聡

序

単体的複体や凸多面体の面の数え上げは，組合せ論，代数幾何，トポロジー，可換代数，表現論などの様々な数学の分野が絡む魅力的な研究分野である．本稿では単体的半順序集合 (単体的セル複体) の面の数え上げについての最近の話題の幾つかを紹介する．特に，多様体の h''-列についての Novik–Swartz の理論，マッチングを使った単体的半順序集合の構成法，Steinberg torus と呼ばれる対称群から作られるトーラスの単体的セル分割等について解説する．

本稿の構成は次の通りである．

§1. Simplicial poset の f-vector と Stanley–Masuda の定理
§2. 球面から多様体へ
§3. 今後の問題と課題
§4. マッチングから作る simplicial poset
§5. Steinberg torus とその h-vector について

1. Simplicial poset の f-vector と Stanley–Masuda の定理

有限な poset P が **simplicial** であるとは，以下の二つの条件を満たす時に言う:

(i) P が極小元 $\hat{0}$ を持つ．
(ii) 任意の元 $x \in P$ に対し, 区間 $[\hat{0}, x] = \{y \in P : \hat{0} \leq y \leq x\}$ が Boolean 代数となる．

Boolean 代数とは，有限集合の部分集合全体からなる集合に包含関係で順序関係を入れてできる poset ことである (図 1 を見よ)．もっと幾何的に言うと, Boolean 代数とは単体の face poset のことである．

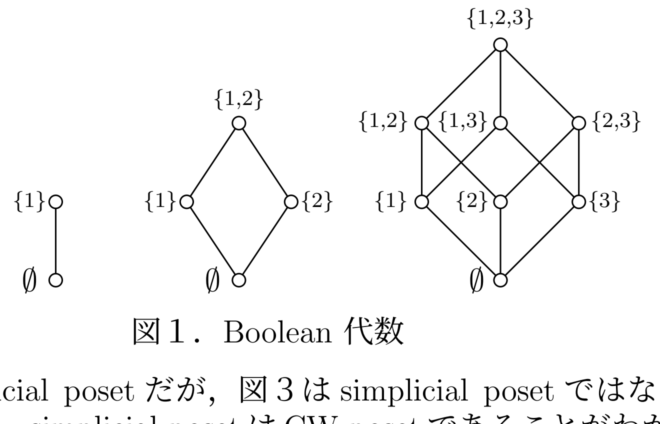


図 1．Boolean 代数

例えば，図 2 は simplicial poset だが，図 3 は simplicial poset ではない．Björner の有名な結果 [Bj] から，simplicial poset は CW-poset であることがわかる．つまり，simplicial poset はある自然な regular CW-complex の face poset になっており，poset から CW-complex $\Gamma(P)$ を定めることができる．また，face poset が simplicial poset

となる CW-complex のことを**単体的セル複体 (simplicial cell complex)** と呼ぶ. (もちろん simplicial poset と単体的セル複体は本質的に同じものである.)

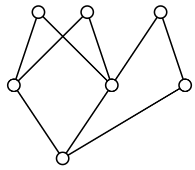


図 2

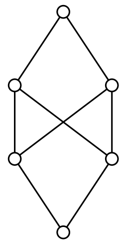


図 3

P を simplicial poset とする時, $[\hat{0}, x]$ が rank i の Boolean 代数となるような元 $x \in P$ を P の rank i の元と呼び，$\operatorname{rank} x = i$ と書く．$d = \operatorname{rank} P = \max\{\operatorname{rank} x : x \in P\}$ とし, 各 $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し,

$$f_i = f_i(P) = \#\{x \in P : \operatorname{rank} x = i\}$$

とおく, 但し # は要素の個数を表すとする (文献によっては上の数が f_{i-1} で表されることもある)．この時，ベクトル

$$f(P) = (f_0, f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$$

を P の **f-vector** (又は **face vector**) と呼ぶ．例えば図 2 の simplicial poset の f-vector は $f(P) = (1, 3, 3)$ である.

Simplicial poset の f-vector に関する最も興味深い結果の一つは Stanley と枡田氏による単体的セル球面の f-vector の特徴付けである．彼らの結果を紹介する前に, h-vector と呼ばれる不変量を紹介する．Rank d の simplicial poset P に対し，P の **h-vector** $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ を以下の (t についての一変数の) 等式を満たすベクトルとして定める

$$\sum_{i=0}^{d} f_{d-i} t^i = \sum_{i=0}^{d} h_{d-i} (t+1)^i$$

但し $(f_0, f_1, \ldots, f_d)$ は P の f-vector とする．この時 f-vector を知ることと h-vector を知ることは同値となる. 定義より f-vector は非負整数ベクトルとなるが, h-vector には負の値が現れることもある.

Simplicial poset P に付随する CW-complex $\Gamma(P)$ が $(d-1)$ 次元球面 S^{d-1} に同相である時, P を **$(d-1)$ 次元単体的セル球面**と呼ぶ. 単体的セル球面の f-vector について次が知られている.

定理 1.1 (Stanley [St2], Masuda [Ma2])**.** ベクトル $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ がある $(d-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector であることと h が以下の三条件を満たすことは同値

(1) $h_0 = 1$ かつ全ての $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h_i = h_{d-i}$.
(2) 全ての i に対し $h_i \geq 0$.
(3) ある $0 < i < d$ について $h_i = 0$ なら $\sum_{i=0}^{d} h_i$ は even.

先に述べたように, f-vector を知ることと h-vector を知ることは同値であるから, 上の定理は単体的セル球面の f-vector の特徴付けを与えることになる.

Note: Simplicial poset は組合せ論的・トポロジー的な観点からは自然な対象であるが，Stanley [St2] は simplicial poset の f-vector が可換代数の道具を使って綺麗に調

べられる事を発見した．(Simplicial poset の可換代数的な扱いについては [St2, Du] を参照せよ.)　定理 1.1 は Stanley が [St2] において十分性と (1), (2) が必要条件であることを証明し, (3) の条件も必要条件となる事を予想していた問題であったが, 2006 年に枡田氏により (3) の必要性も証明され, 問題は肯定的に解決された．球面の f-vector の研究はいわゆる face enumeration と呼ばれる分野の主要なテーマの一つである．球面の f-vector についてのより詳しい背景については [BK, Ma1] 等を見よ．

2. 球面から多様体へ

X を有限三角形分割可能な位相空間とする．$\Gamma(P)$ が X と同相となる simplicial poset P を X の単体的セル分割と呼ぶ. Stanley–Masuda の定理は球面の単体的セル分割の f-vector の特徴付けを与える定理である．すると，次の問題を考えることは自然であろう．

問題 2.1. M を有限三角形分割可能な多様体とする．M の単体的セル分割の f-vector を特徴付けよ．

球面の単体的セル分割の f-vector を調べる際には h-vector を考えると上手い特徴付けが得られた. 残念ながら，一般の多様体を考える時, h-vector は綺麗な形をしているとは限らない (後述の例 2.2 を見よ)．多様体の単体的セル分割を調べる際には Novik [No] によって導入された h''-vector を考えることが有効である．

Rank d の simplicial poset P に対し，

$$\beta_i = \beta_i(P) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{H}_i\big(\Gamma(P); \mathbb{Z}_2\big)$$

を P の ($\mathbb{Z}_2$ 上の) ベッチ数とする ($\tilde{H}_i(\Gamma(P); \mathbb{Z}_2)$ は $\Gamma(P)$ の $\mathbb{Z}_2$ 上の被約ホモロジー群). Simplicial poset P の h-vector が $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ である時, P の **h''-vector** $h''(P) = (h''_0, h''_1, \ldots, h''_d)$ を次で定義する

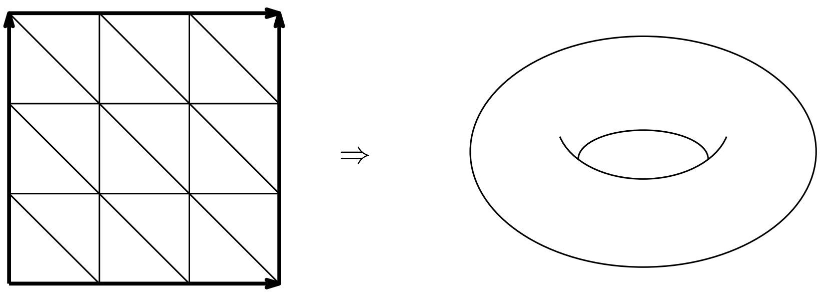
$$h''_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ h_k - \dbinom{d}{k} \left\{ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-k} \beta_{\ell-1} \right\}, & \text{if } 1 \le k \le d-1, \\ h_d - \sum_{\ell=1}^{d-1} (-1)^{\ell-d} \beta_{\ell-1} = \beta_{d-1}, & \text{if } k = d. \end{cases}$$

h''-vector を理解するのは簡単ではないので一つ例を挙げておく．

例 2.2. 下の二次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の標準的な三角形分割を考え，P をその face poset とする．この時, $f(P) = (1, 9, 27, 18)$ であり，$h(P) = (1, 6, 12, -1)$ となる．$\beta_1(P) = 2$ であるから

$$h''(P) = h(P) - 2(0, 0, 3, -1) = (1, 6, 6, 1)$$

となる．



注 2.3. P が単体的セル球面ならトップ以外のベッチ数は消えているから $h''(P) = h(P)$ である．もっと一般に, $\Gamma(P)$ がホモロジー球面なら $h''(P) = h(P)$ である．

Simplicial poset の h''-vector を考える重要なポイントは, 境界の無い多様体の単体的セル分割の h''-vector は必ず非負でかつ対称になるという点である．

定理 2.4. P を境界の無い $(d-1)$ 次元多様体 M の単体的セル分割とし, $h''(P) = (h''_0, h''_1, \ldots, h''_d)$ とおく．次が成り立つ．

(1) (Novik [No]) $h''_0 = 1$ かつ全ての $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h''_i = h''_{d-i}$.

(2) (Novik-Swartz [NS1]) 全ての i に対し $h''_i \geq 0$.

(3) ([Mu]) ある $0 < i < d$ について $h''_i = 0$ なら $\sum_{i=0}^{d} h''_i$ は even.

上の定理から Stanley–Masuda の定理の少なくとも必要条件は任意の境界の無い多様体で成り立つことがわかる．上の定理の証明は簡単ではない．ここでは (1) と (2) について証明の雰囲気だけ述べることにする．

(1) は以下の二つの式から比較的容易に従う

$$h_{d-i} - h_i = (-1)^i \binom{d}{i} \Big(\chi(P) - \big(1 + (-1)^{d-1}\big)\Big),$$

$$\beta_i = \beta_{d-1-i},$$

但し $\chi(P) = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{k-1} f_k(P)$ はオイラー数である．一つ目の等式は (Klee's) Dhen–Sommerville equation と呼ばれる ([Kl, MMP] 参照)．二つ目の等式は Poincaré duality である．

(2) を証明するには Novik–Swartz の理論 [NS1] が必要である (可換代数についての知識がない場合は読み飛ばすと良い)．K を標数 2 の無限体とし, $K[P]$ を P の face ring とする (face ring については [St2] を見よ)．$\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_d$ を次数 1 の元からなる $K[P]$ の巴系 (parameter) とし, $K[P]$ のイデアル $\Sigma\Theta = \sum_{i=1}^{d} (\theta_1, \ldots, \hat{\theta}_i, \ldots, \theta_d) : \theta_i$ を考える．この時

$$h''_i = \dim_K (K[P]/\Sigma\Theta)_i \tag{1}$$

が成り立ち, h''_i の非負性が従う．

注 2.5. 上の証明において $K[P]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)$ のヒルベルト関数のことを h'-vector と呼ぶ．h'-vector は Schenzel [Sc] によって代数的なモチベーションから導入された．h''-vector は h'-vector の改良版であると思って良い．

注 2.6. 境界の無い多様体の場合のみ考えたが，(2) の条件については境界のある多様体についても成り立つ．但し (1) や (3) は成り立たない．

注 2.7. Novik–Swartz の理論は元々は多様体の三角形分割の (つまり単体的複体の場合の)f-vector の研究において考案された概念であり, P が単体的複体の時はより強いことが言える．h''-vector はある 0 次元 Gorenstein 環のヒルベルト関数に一致する ([NS2])．

さて，先の定理 2.4 は多様体の単体的セル分割についての強力な必要条件を与える．しかし，十分条件についてはどうだろうか？つまり，どんな多様体に対して定理 2.4 の条件は必要十分条件になるだろうか？この問題について，次のことがわかっている．

定理 2.8 ([Mu]). M が二つの球面の直積 $S^n \times S^m$, 又は実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の時, 定理 2.4 の条件は必要十分である.

Note: h''-vector は Novik の修士論文において考案されたものであるが, h''-vector が等式 (1) のように環のヒルベルト関数として上手く実現できることが発見されたのは最近のことである. ただ, 等式 (1) に現れる環は 83 年の Goto [Go] の論文などにも現れており代数的にはもっと以前から考えられていたもののようである.

等式 (1) は多様体の単体的セル分割よりもっと広い Buchsbaum simplicial posets と呼ばれるクラスで成り立つ. Buchsbaum simplicial poset の f-vector の特徴付けも興味深い問題である ([NS1, Question 7.1]).

3. 今後の問題と課題

定理 2.8 により, 球面の直積や実射影空間の単体的セル分割の f-vector の特徴付けが得られる. 実は, これらの連結和を取ることで得られる多様体に対しても定理 2.4 の条件は f-vector の満たす必要十分条件となるので, かなり大きいクラスの多様体について単体的セル分割の f-vector の特徴付けが得られることになる. 定理 2.4 の条件が f-vector の満たす必要十分条件となる多様体は他にもありそうである. 例えば, 実射影空間 $\mathbb{C}P^n$ などは有力な候補ではないかと思う (実際 $\mathbb{C}P^2$ の場合は必要十分となる). この問題を考える際, 次の補題が有効である (証明は [Mu, Corollary 3.2] を参照).

補題 3.1. M を有限三角形分割可能な境界の無い $(d-1)$ 次元多様体とする. 次は同値.

- (i) 定理 2.4 の条件が M の単体的セル分割の h''-vector の満たす必要十分条件となる.
- (ii) M の単体的セル分割 P で $h''(P) = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ となるものが存在.
- (iii) M の単体的セル分割 P で $f_d(P) = 2 + \sum_{i=1}^{d-2} \binom{d-1}{i} \beta_i$ となるものが存在.

つまり, ファセットの個数がある特定の値になるような単体的セル分割が構成できれば良い. (よって h''-vector について何も理解していなくても問題は解ける !! かもしれない.) 残念ながら, 全ての多様体に対して定理 2.4 の条件が h''-vector の満たす必要十分条件になるわけではない. むしろ定理 2.4 の条件が必要十分となるような多様体はかなり特別な多様体であるように思われる. 実際 h''-vector の定義はホモロジー群しか見ていないので, ホモロジー群以外の理由で構造が複雑になっている多様体に対しては Novik–Swartz の理論だけでは上手く行かないのは自然なことのように思われる. 簡単な例を一つ挙げておく.

例 3.2. 球面ではないホモロジー球面 M を考える. この時, 補題 3.1 の (iii) に現れる数は $2 + \sum_{i=1}^{d-2} \binom{d-1}{i} \beta_i(M) = 2$ となる. しかしファセットが 2 つで作れる多様体は球面と球体しかないので M に対して定理 2.4 の条件は必要十分とはならない.

定理 2.4 の条件が必要十分にならない多様体の単体的セル分割の f-vector の特徴付けを得るのはかなり難しい問題であるように思われる (少なくとも全く新しいアイデアが必要であろう). しかし, これは非常に興味深い問題である. とりあえずは 3 次元や 4 次元の場合の色々な具体的な多様体について, その h''-vector の取りうる値を調べてみることからはじめてみるのが筋ではないかと思う. 例えば, [Li, p. 29] によると, 三次元トーラス $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ の単体的セル分割 P で $h''(P) = (1, 0, 0, 0, 1)$

となるものは無いらしい. しかし, 次がわかれば三次元トーラスの単体的セル分割の f-vector の特徴付けが得られる.

問題 3.3. P が T^3 の単体的セル分割なら $h''_2(P) \geq 4$ ($\Leftrightarrow h_2(P) \geq 22$) か？

実際に $h''(P) = (1, 0, 4, 0, 1)$ となる T^3 の単体的セル分割は得られる (定理 5.1 を見よ). 一般のトーラスに対しては, 問題はより難しいように思われる. 後で述べる Steinberg torus のことを考えると，次の問題を提唱したい.

問題 3.4. n 次元トーラス T^n の単体的セル分割は少なくとも $(n+1)!$ 個のファセットを持つか？

Note: 本稿では，境界の無い多様体のみに限って話をしてきたが，もちろん，境界を持つ場合を考えることも面白い問題である. 残念ながら境界がある場合には一番簡単なケースである球体の場合でさえ f-vector の特徴付けは得られていない. しかし，Kolins [Ko] は球体の場合にかなり良い必要条件と十分条件を得ており，球体の場合は今後解決が期待される問題である.

また，本稿は単体的セル分割の範疇で考えているが，Novik–Swartz の理論は元々は多様体の三角形分割の f-vector を調べる為に導入されたものである. 三角形分割の場合には球面の場合ですら f-vector の特徴付けは得られておらず, 問題はずっと難しくなる. 三角形分割の場合にどのくらいのことがわかっているかについては参考文献として [LSS, Sw] を挙げておく.

4. マッチングから作る SIMPLICIAL POSET

単体的セル分割の f-vector の十分条件を調べる際に重要な問題は, 多様体の単体的セル分割を具体的にどのように構成するか？という点である. この章ではマッチングから simplicial poset を作る方法について紹介する.

$G = (V, E)$ を V を頂点集合, E を辺集合とする多重グラフとする (グラフ理論に関する基本的な事項に関しては [St1, Appendix] 等を参照). G が**完全マッチング**であるとは次の二つの性質を満たす時に言う.

- G の任意の異なる二辺 $e \neq e'$ はは共通の頂点を持たない.
- 任意の頂点 $v \in V$ に対し, v を頂点とする辺 $e \in E$ が存在.

偶数個の要素を持つ頂点集合 V を考え, $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_d\}$ を V を頂点とする完全マッチングの集合とする. 部分集合 $S \subset [d] = \{1, 2, \ldots, d\}$ に対し,

$$\Lambda_S = \bigcup_{i \in S} G_i = (V, \bigcup_{i \in S} E_i)$$

を $i \in S$ となる G_i の辺集合の和集合を辺集合とするグラフとする. 全てのグラフの和集合 $\Lambda_{[d]} = G_1 \cup \cdots \cup G_d$ が連結グラフである時, 完全マッチングの集合 Λ を **admissible** であると呼ぶことにする.

Admissible な完全マッチングの集合 $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_d\}$ に対し poset P_Λ を, 集合として

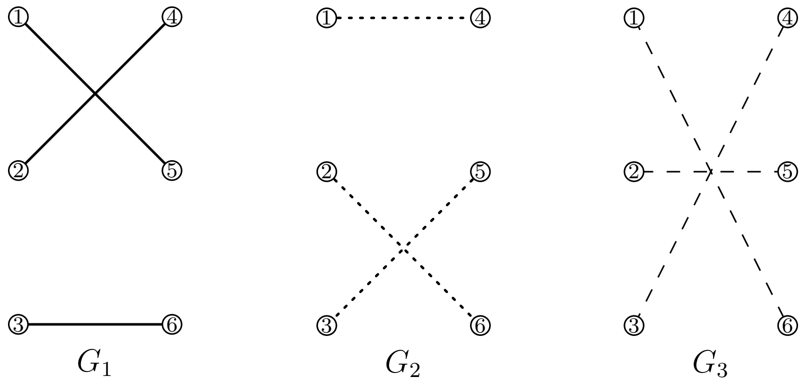
$$P_\Lambda = \big\{(H, S) : S \subset [d],\ H \text{ は } \Lambda_S \text{ の連結成分}\big\}$$

であり ($S = \emptyset$ の時は H は一点集合), 順序関係が

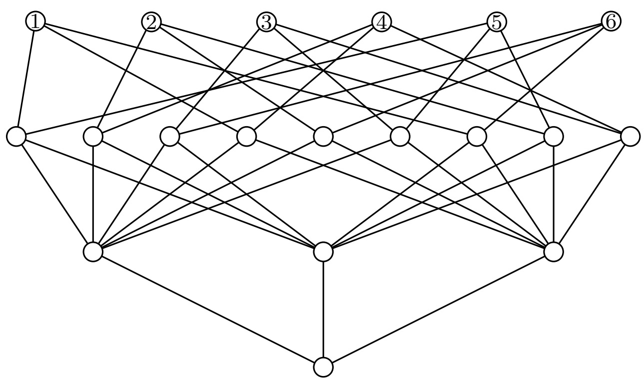
$$(H, S) \geq (H', S') \Leftrightarrow S \subset S' \text{ かつ } H \text{ は } H' \text{ の部分グラフ}$$

となるものとして定める. この時 P_Λ は simplicial poset になることが簡単にわかる.

例 4.1. 例えば下の三つの完全マッチング G_1, G_2, G_3 を考える. 集合 $\Lambda = \{G_1, G_2, G_3\}$ から作られる poset P_Λ は以下のようになる.



⇒



P_Λ

定義からすぐわかることだが, グラフの各頂点が poset のファセットに対応し, グラフの各辺が rank $d-1$ の要素に対応する. 上の例においては, 番号が付いている 6 つの rank 3 の元がグラフの頂点に対応し, rank 2 の 9 個の元がそれぞれ G_1, G_2, G_3 の辺に対応し, rank 3 の 3 個の元がグラフ $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cup G_3$, $G_2 \cup G_3$ に対応する ($G_1 \cup G_2$, $G_1 \cup G_3$, $G_2 \cup G_3$ は連結グラフなのでそれぞれが一つの元に対応する).

ある admissible な完全マッチングの集合 Λ があり $P \cong P_\Lambda$ となる simplicial poset P を **graphical simplicial poset** と呼ぶ (とりあえずこのような名前を [Mu] で付けたのだが, マッチング simplicial poset と呼んだ方が正確かも知れない). もちろん graphical simplicial poset は非常に特別な simplicial poset である. 実際 rank d の graphical simplicial poset は組合せ論的には d-色で頂点彩色可能な正規な $(d-1)$ 次元擬似多様体というクラスに一致する. 一方で, 次の事実から graphical simplicial poset は多様体の単体的セル分割を考える上で重要である (証明は [FGG, Mu] 等を参照).

補題 4.2. M を有限三角形分割可能な境界の無い多様体とする.

(i) M の単体的セル分割 P で $h''_1(P) = 0$ となるものが必ず存在する.

(ii) P が M の単体的セル分割で $h''_1(P) = 0$ なら P は graphical simplicial poset.

上の補題から補題 3.1 の条件を満たす単体的セル分割は必ず graphical simplicial poset として得られることがわかる. よって多様体の単体的セル分割の f-vector を調べる際には graphical simplicial poset を考えることは非常に本質的である.

完全マッチングの中でも, 二部グラフの完全マッチングは特に扱いやすい. 二部グラフの完全マッチングと graphical simplicial poset について次が知られている.

定理 4.3. $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_d\}$ を admissible な完全マッチングの集合とし, P_Λ が境界の無い多様体 M の単体的セル分割になっているとする. この時, $\Lambda_{[d]}$ が二部グラフであることと M が向き付け可能であることは同値.

Note: ここで紹介したマッチングからの単体的セル分割の構成は, 元々は色付多重グラフからの多様体の単体的セル分割の構成として知られているものをマッチングの言葉で書き直したものである (つまり, マッチングの集合 $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_d\}$ を考えるのではなく多重グラフ $\biguplus_{i\in[d]} G_i$ を考え, 各 G_i の辺が i 番目の色で塗られていると思うのである). このようなグラフを使って多様体を調べる手法は crystallization または gem (graph encodes manifolds) と呼ばれ, トポロジーの分野で色々と興味深いことが調べられている. 細かくは紹介しないが, 実際に [Mu] における定理 2.8 の証明でも crystallization の理論を使っている. Crystallization に関する参考文献としては [FGG] を挙げておく. また, 3 次元の場合に crystallization として得られる多様体を計算機を使って列挙していくという研究もある [Li]. 特に [Li] には, 色々な具体的なグラフで多様体の単体的セル分割を表すものが沢山書いてあり, ぱらぱらと眺めているだけでも楽しめる.

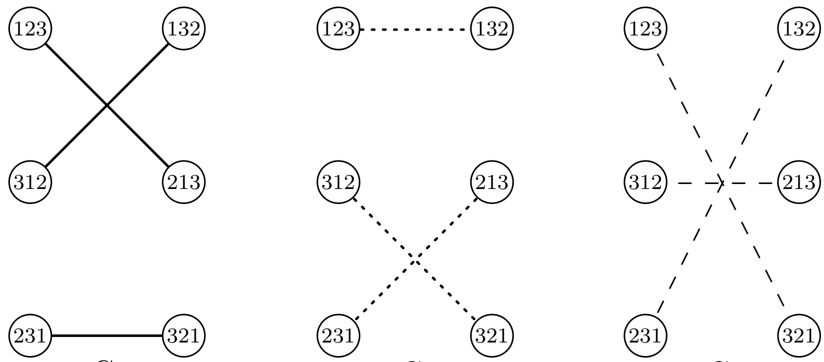
5. Steinberg torus とその h-vector

Graphical simplicial poset として得られる興味深い単体的セル複体の一つに Steinberg torus と呼ばれるものがある. 一般に Coxeter complex から構成できるのだが, 表現論のことは私は不勉強なので, 本稿では A 型の場合だけ述べる.

n を正の整数とし, S_n で集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ の置換全体を表す. 置換 $\sigma \in S_n$ を数の列 $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ で表すことにする. 頂点集合を $V = S_n$ とするマッチングの集合 $\Lambda(n) = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ を

$$\{\sigma, \tau\} \text{ が } G_i \text{ の辺} \Leftrightarrow \sigma \text{ と } \tau \text{ が } i \text{ 番目と } i+1 \text{ 番目の数の入れ替えで移りあう}$$

となるように定義する, 但し $i = n$ の時は n 番目と 1 番目の入れ替えを考える. 例えば前の章の例 4.1 のマッチングの集合は次のように見れば $\Lambda(3)$ に一致することがわかる.



G_1 G_2 G_3

実は, $P_{\Lambda(n)}$ は $(n-1)$ 次元トーラス $T^{n-1} = S^1 \times \cdots \times S^1$ の単体的セル分割となり, $P_{\Lambda(n)}$ を **Steinberg torus** と呼ぶ. なぜトーラスができるかの雰囲気だけ述べておこう (詳しくは [DPS] を見よ). $\Lambda'(n) = \{G_1, \dots, G_{n-1}\}$ とおくと, $P_{\Lambda'(n)}$ は単体的複体となる. 実際 $P_{\Lambda'(n)}$ は permutahedron の双対多面体の境界複体 (つまり A 型の Coxeter complex) になっていることがわかるのだが, $\Lambda'(n)$ に G_n を加えると permutahedron の双対多面体のちょうど反対側にある面を同一視することで得られる単体的セル複体となりトーラスができる.

さて, $P_{\Lambda(n)}$ は $(n-1)$ 次元トーラスの単体的セル分割を与えるのであるが, 明らかに $f_n(P_{\Lambda(n)}) = n!$ である. 一方で $f_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$ であるから, $P_{\Lambda(n)}$ の h-vector が S_n の元で何らかの性質を満たすものたちの数を数えることで計算できるのではないか？と思うのは自然なことであろう. 実際 $P_{\Lambda(n)}$ の h-vector は Eulerian polynomial から簡単に計算できる.

置換 $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ に対し

$$d(\sigma) = \#\{i \in [n-1] : \sigma(i) > \sigma(i-1)\}$$

とおく (つまり descent の数である).

定理 5.1 (Dilks–Petersen–Stembridge [DPS])**.**

$$\begin{aligned} h_i(P_{\Lambda(n)}) &= n \times \#\{\sigma \in S_{n-1} : d(\sigma) = i-1\} + (-1)^i \binom{n}{i} \quad (0 \le i \le d), \\ h''_i(P_{\Lambda(n)}) &= n \times \#\{\sigma \in S_{n-1} : d(\sigma) = i-1\} - \binom{n}{i}\binom{n-2}{i-1} \quad (1 \le i \le d-1). \end{aligned}$$

例えば,

$$\begin{gathered} h(P_{\Lambda(3)}) = (0,3,3,0) + (1,-3,3,-1) = (1,0,6,-1), \\ h(P_{\Lambda(4)}) = (0,4,16,4,0) + (1,-4,6,-4,1) = (1,0,22,0,1) \\ h(P_{\Lambda(5)}) = (0,5,55,55,5,0) + (1,-5,10,-10,5,-1) = (1,0,65,45,10,-1) \\ h''(P_{\Lambda(3)}) = (0,3,3,0) + (1,-1\times 3,-1\times 3,1) = (1,0,0,1), \\ h''(P_{\Lambda(4)}) = (0,4,16,4,0) + (1,-1\times 4,-2\times 6,-1\times 4,1) = (1,0,4,0,1) \\ h''(P_{\Lambda(5)}) = (0,5,55,55,5,0)+(1,-1\times 5,-3\times 10,-3\times 10,-1\times 5,1) = (1,0,25,25,0,1) \end{gathered}$$

のようになる.

注 5.2. 実際には [DPS] では flag h-vector を計算しているので, affine descent と呼ばれるものを数えている. しかし単に h-vector を計算する場合は descent を数えれば十分である.

Note: 私が初めに Steinberg torus の話を聞いたのは 2008 年夏のチリでの FPSAC であったと思う. 実は講演を聴いた時には simplicial poset のことは詳しくなかったので, 何の話だかさっぱりわからなかった. この話を思い出したのは, 枡田先生からトーラスと permutahedron は何か関係がありそうだという話を聞いた時である. 講演内容はさっぱり理解していなかったが, トーラスと simplicial poset というキーワードを覚えていたので, そういえばと思い出したのである. この章はその時に調べたことを簡単に纏めたものである.

Steinberg torus は対称群から上手くトーラスを作るのだが, 似たような構成法で他の多様体の単体的セル分割も作れないのだろうか? 例えば, ポアンカレ球面も 24 個のファセットを持つ単体的セル分割が作れるのだが, これを S_4 から上手く作れたりはしないのだろうか？

また graphical simplicial poset の構成は有限個の完全マッチングを与えて構成するわけであるが, 向き付け可能な場合は二部グラフのマッチングを与えることにな

り, 結局有限個の対称群の元から simplicial poset を構成していることになる. このような考え方を使って, 表現論的な立場から何らかの新しい帰結を導く事ができれば非常に面白い話になるのではないかと思う.

References

[Bj] A. Björner, Posets, regular CW complexes and Bruhat order, *European J. Combin.* **5** (1984), 7–16.

[BK] A. Björner and G. Kalai, f-vectors and homology, Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference (New York, 1985), Ann. New York Acad. Sci., vol. 555, New York Acad. Sci., 1989, pp. 63–80.

[DPS] K. Dilks, T.K. Petersen and J.R. Stembridge, Affine descents and the Steinberg torus, *Adv. Appl. Math.* **42** (2009), 423–444.

[Du] A. Duval, Free resolutions of simplicial posets, *J. Alg.* **188** (1997), 363–399.

[FGG] M. Ferri, C. Gagliardi and L. Grasselli, A graph-theoretical representation of PL-manifolds—a survey on crystallizations, *Aequationes Math.* **31** (1986), 121–141.

[Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.

[Kl] V. Klee, A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem, *Canadian J. Math.* **16** (1964), 517–531

[Ko] S. Kolins, f-vectors of Simplicial Posets that are Balls, arXiv:1009.1917, preprint.

[Li] S. Lins, Gems, computers, and attractors for 3-manifolds, Series on Knots and Everything, vol. 5, World Scientific, 1995.

[LSS] F. Lutz, T. Sulanke and E. Swartz, f-vectors of 3-manifolds, *Electron. J. Combin.* **16** (2009), R13.

[Ma1] M. Masuda, 単体的セル分割の単体の数, 数理解析研究所講究録 **1393** (2004), 88–95.

[Ma2] M. Masuda, h-vectors of Gorenstein* simplicial posets, *Adv. Math.* **194** (2005), 332–344.

[MMP] H. Maeda, M. Masuda and T. Panov, Torus graphs and simplicial posets, *Adv. Math.* **212** (2007), 458–483.

[Mu] S. Murai, Face vectors of simplicial cell decompositions of manifolds, preprint, arXiv:1010.0319.

[No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.

[NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.

[NS2] I. Novik and E. Swartz, Gorenstein rings through face rings of manifolds, *Compos. Math.* **145** (2009), 993–1000.

[Sc] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, *Math. Z.* **178** (1981), 125–142.

[Sw] E. Swartz, Face enumeration: from spheres to manifolds, *J. Eur. Math. Soc.* **11** (2009), 449–485

[St1] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 1, Cambrdige Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[St2] R.P. Stanley, f-vectors and h-vectors of simplicial posets, *J. Pure Appl. Algebra* **71** (1991), 319–331.

Satoshi Murai, Department of Mathematical Science, Faculty of Science, Yamaguchi University, 1677-1 Yoshida, Yamaguchi 753-8512, Japan.

E-mail address: murai@yamaguchi-u.ac.jp