

絶対値の観測のみを用いた2つの複素信号の相関係数推定*

○宮部滋樹 (筑波大), 小野順貴 (NII/総研大), 牧野昭二 (筑波大)

1 はじめに

ウィーナーフィルタやスペクトル減算といった雑音除去, 線形アレー信号処理のポストフィルタやエコー抑圧, 近年では非負値行列分解を用いた音源分離など, 本来複素数値で観測される時間周波数領域の信号の振幅のみを用いる非線形な信号処理が求められることがある。振幅の処理が用いられる理由は, 線形処理よりも強力な雑音抑圧が求められる場合のほか, 位相の信頼性が低い場合など様々である。このような非線形な信号処理の多くは統計的な分析に基づいており, 相互相関などの統計量の推定が重要となる。このような統計量は, 振幅の統計量が求められる場合だけでなく, 元の複素数信号の統計量が求められる場合もある。しかし, 信頼できる位相の観測ができない場合などでは, 振幅の観測のみを用いて複素数の相互相関を推定するのは難しい。本稿では, 位相情報を隠れ変数と見なした確率モデルによって, 振幅の観測のみから複素相関を推定する手法について述べる。

2 問題設定

いま, 相関のある2つの零平均複素確率変数 $X_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ があるものとする。また, 2つの確率変数はそれぞれ以下のような統計量を持つものとする。

$$E[X_i] = 0 \quad (1)$$

$$E[X_i^2] = 0 \quad (2)$$

$$E[|X_i|^2] = \sigma_i^2 \quad (3)$$

$$E[X_1 X_2^*] = \sigma_1 \sigma_2 \rho \quad (4)$$

ここで $\{\cdot\}^*$ は複素共役を, $E[\cdot]$ は期待値を表す。また式(2)は, X_i の偏角 Θ_i の周辺確率密度分布が一様分布であることを示す。

$$\Theta_i = \angle X_i \quad (5)$$

$$p_{\Theta_i}(\theta_i) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \theta_i < \pi \quad (6)$$

しかし複素変数 X_i , $i = 1, 2$ は観測されず, 代わりにその絶対値 Y_i のみが観測されるものとする。

$$Y_i = |X_i| \quad (7)$$

これは偏角 Θ_i が失われて観測されることに相当する。

本稿では, 以上のような絶対値 Y_i , $i = 1, 2$ のみが観測される条件で相関係数 $|\rho|$ を求める問題について議論する。ここで, 言うまでもなく分散 σ_i^2 , $i = 1, 2$ の推定は標本平均で求めることができる。

$$\sigma_i^2 \leftarrow E[y_i(n)^2] \quad (8)$$

ここで $y_i(n)$, $n = 1, \dots, N$ は確率変数 Y_i の N 個の標本を表し, 以下では確率変数を大文字で, 標本を標本インデックス n を引数とする小文字で表すものとする。しかし相互相関については絶対値観測の相互相関に一致しない。

$$E[Y_1 Y_2] \neq \sigma_1 \sigma_2 |\rho| \quad (9)$$

そのため以下のような絶対値の積の平均は相関係数 $|\rho|$ の良い推定を与えない。

$$|\rho| \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y_1(n) y_2(n)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (10)$$

従って, 複素変数の相関係数を絶対値のみから推定する問題は自明ではない。

3 複素正規分布を仮定した相関推定

3.1 確率モデル

本稿では, 確率変数 x_i , $i = 1, 2$ が式(1)–(4)を満たす単純な仮定として, 以下のような零平均2変数複素正規分布に従うと仮定した確率モデルについて議論する。

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2; \rho) = \frac{\exp\left(-\frac{\sigma_2^2 |x_1|^2 + \sigma_1^2 |x_2|^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{Re}[\rho^* x_1 x_2^*]}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)}\right)}{\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)} \quad (11)$$

ここで

$$x_i^{\mathcal{R}} = \operatorname{Re}[x_i] \quad (12)$$

$$x_i^{\mathcal{I}} = \operatorname{Im}[x_i] \quad (13)$$

として, 極座標系への変数変換

$$dx_1^{\mathcal{R}} dx_1^{\mathcal{I}} dx_2^{\mathcal{R}} dx_2^{\mathcal{I}} = y_1 y_2 dy_1 dy_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (14)$$

* Estimation of correlation coefficient between to complex signals only with observation of absolute values. by MIYABE, Shigeki (University of Tsukuba), ONO, Nobutaka (NII/Sokendai), MAKINO, Shoji (University of Tsukuba)

により、観測される絶対値 Y_i と観測されない偏角 Θ_i の同時確率密度が以下のように与えられる。

$$p_{Y_1, Y_2, \Theta_1, \Theta_2}(y_1, y_2, \theta_1, \theta_2; \rho) = \frac{y_1 y_2 \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 y_1^2 + \sigma_1^2 y_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 |\rho| y_1 y_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 - \angle \rho)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)}\right)}{\pi \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)} \quad (15)$$

これを偏角 θ_1, θ_2 で周辺化することにより、観測される絶対値 Y_1, Y_2 の尤度が以下のような2変量レイリー分布 [1] として求められる。

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; |\rho|) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_{Y_1, Y_2, \Theta_1, \Theta_2}(y_1, y_2, \theta_1, \theta_2; \rho) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{4y_1 y_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)} I_0\left(\frac{2|\rho| y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\rho|^2)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 y_1^2 + \sigma_1^2 y_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)}\right) \quad (16)$$

ここで $I_\nu(\cdot)$ は次数 $\nu \in \mathbb{R}$ の第1種変形ベッセル関数である。相互相関パラメタ ρ は尤度の中では絶対値を取った相関係数 $|\rho|$ の形で現れ、確率が共分散の偏角に依存しないことがわかる。従ってこの確率モデルを用いた最尤法により、相関係数 $|\rho|$ を推定することができる。しかしこの最尤推定は解析的に解くことができない。

3.2 EM アルゴリズムによる最尤推定

観測できない偏角 $\theta_1(n), \theta_2(n)$ と観測 $y_1(n), y_2(n)$ を併せて完全データとして扱うことにより、式 (16) の最尤推定を繰り返し最適化により求める EM アルゴリズムを導出する。

まず、以下のように定義される θ を隠れ変数として扱うこととする。

$$\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 \quad (17)$$

式 (6) の、 θ_i の周辺分布が一様であるという仮定を用いると、隠れ変数 θ の事後確率密度 $p(\theta|y_1, y_2)$ が以下のように求められる。

$$p_{\Theta|Y_1, Y_2}(\theta|y_1, y_2; \rho) = p_{\Theta|\Theta_2, Y_1, Y_2}(\theta + \theta_2|\theta_2, y_1, y_2; \rho) = \frac{p_{Y_1, Y_2, \Theta_1, \Theta_2}(y_1, y_2, \theta + \theta_2, \theta_2; \rho)}{p_{\Theta_2}(\theta_2) p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; |\rho|)} = \frac{\exp\left(\frac{2|\rho| y_1 y_2 \cos(\theta - \angle \rho)}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\rho|^2)}\right)}{2\pi I_0\left(\frac{2|\rho| y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\rho|^2)}\right)} \quad (18)$$

また、完全データ $\{Y_1, Y_2, \Theta\}$ の同時確率密度関数が以下のように与えられる。

$$p_{Y_1, Y_2, \Theta}(y_1, y_2, \theta; \rho) = p_{\Theta|Y_1, Y_2}(\theta|y_1, y_2; \rho) p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; |\rho|) = \frac{2y_1 y_2 \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 y_1^2 + \sigma_1^2 y_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 y_1 y_2 \cos(\theta - \angle \rho)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)}\right)}{\pi \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)} \quad (19)$$

以上のように求められた事後密度と同時密度を用いると、尤度を繰り返し計算で最適化する EM アルゴリズムのための Q 関数は以下のように求めることができる。

$$Q(|\rho|; |\bar{\rho}|) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{\Theta|Y_1, Y_2}(\theta|y_1, y_2; \bar{\rho}) \log p_{Y_1, Y_2, \Theta}(y_1, y_2, \theta; \rho) = -\frac{\sigma_2^2 y_1^2 + \sigma_1^2 y_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 y_1 y_2 \lambda}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - |\rho|^2)} - \log(1 - |\rho|^2) + \text{const.} \quad (20)$$

ここで λ は以下のように求められる $|\bar{\rho}|$ を固定した条件での $\cos(\theta - \angle \rho)$ の期待値積分を表す。

$$\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta - \angle \rho) p_{\Theta|Y_1, Y_2}(\theta|y_1, y_2) d\theta = \frac{I_1\left(\frac{2|\bar{\rho}| y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\bar{\rho}|^2)}\right)}{I_0\left(\frac{2|\bar{\rho}| y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\bar{\rho}|^2)}\right)} \quad (21)$$

また、 $|\bar{\rho}|$ を固定した条件で Q 関数を最大化するパラメタ推定 $|\rho|$ は、以下の偏微分を用いた極大点の推定により得られる。

$$\frac{\partial Q(|\rho|; |\bar{\rho}|)}{\partial |\rho|} = 0 \quad (22)$$

これを式 (8) の $\sigma_i^2, i = 1, 2$ の推定を用いて解くと、最適な $|\rho|$ の推定は以下ようになる。

$$|\rho| = \frac{y_1 y_2 \lambda}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (23)$$

以上より、EM アルゴリズムによる相関係数 $|\rho|$ の推定は以下ようになる。最初に $|\rho|$ に適当な初期値を与え、E ステップの更新

$$\lambda(n) \leftarrow \frac{I_1\left(\frac{2|\rho| y_1(n) y_2(n)}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\rho|^2)}\right)}{I_0\left(\frac{2|\rho| y_1(n) y_2(n)}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - |\rho|^2)}\right)} \quad (24)$$

と M ステップの更新

$$|\rho| = \frac{E[y_1(n) y_2(n) \lambda(n)]}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (25)$$

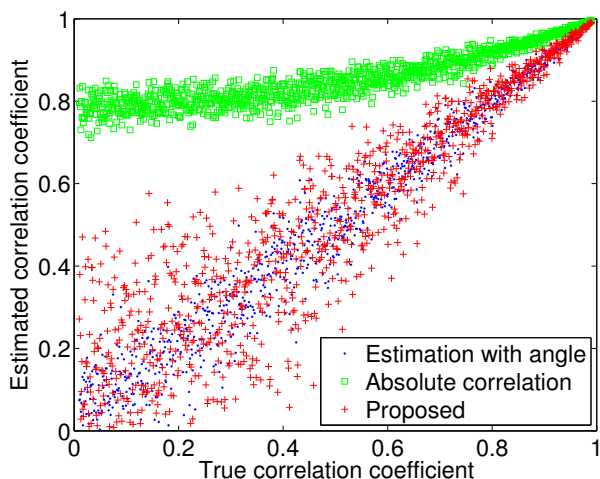


Fig. 1 Estimation results of correlation coefficients between two pseudo random variables of complex normal distribution.

を繰り返すことにより、 $|\rho|$ の推定は局所最適解に収束する。ここで式 (24) の E ステップの更新において、第 1 種変形ベッセル関数は引数が大きい場合に浮動小数点例外 Inf を生じてしまうため、このような場合には以下の漸近近似で置き換える必要がある。

$$\frac{I_1\left(\frac{2|\rho|y_1(n)y_2(n)}{\sigma_1\sigma_2(1-|\rho|^2)}\right)}{I_0\left(\frac{2|\rho|y_1(n)y_2(n)}{\sigma_1\sigma_2(1-|\rho|^2)}\right)} \approx 1 \text{ for } \frac{2|\rho|y_1(n)y_2(n)}{\sigma_1\sigma_2(1-|\rho|^2)} \gg 0 \quad (26)$$

4 数値シミュレーション

4.1 2 変量正規分布の相関係数推定

2 変量複素正規分布の疑似乱数に対する相関係数推定の数値シミュレーションを行う。ここで各次元の分散の推定は自明であるため、各次元の分散が 1 の複素ガウス変数の相互相関の絶対値を 0 から 1 まで変えて、近似最尤推定と EM アルゴリズムによる推定を比較した。各トライアルの標本数は 100、EM アルゴリズムは式 (10) の絶対値の相関を初期値としてのイタレーション 20 回で学習した。

シミュレーション結果を図 1 に示す。EM アルゴリズムの結果は高い精度であることがわかる。近似最尤推定の結果は、低い相関のもとでは推定精度が低いことがわかる。また EM アルゴリズムの結果は、やや分散が大きくなるものの、真の相関係数の周辺に推定地が分布している。

4.2 正規分布に従わない確率変数の相関係数推定

次に、正規分布を仮定したモデルのミスマッチを評価するため、非ガウスのデータを疑似乱数を用い

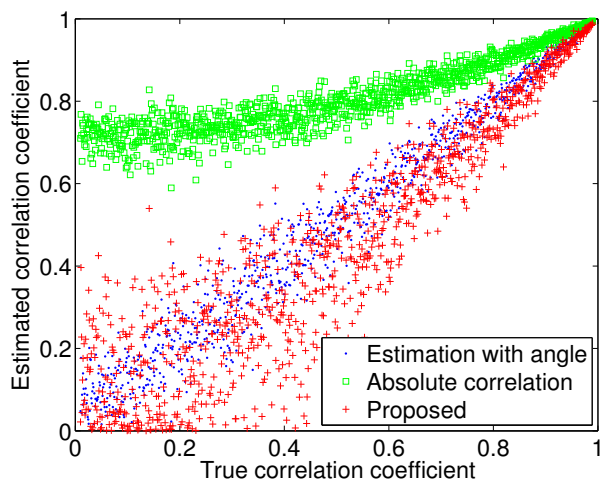


Fig. 2 Estimation results of correlation coefficients of the non-Gaussian data generated from pseudo random variables following complex generalized normal distributions.

て生成した。ここではまず 2 つの複素一般化正規分布に従う疑似乱数 [2] を生成し、次にそれらの線形混合によって相関を持たせたデータを生成した。相関係数の大きさは混合比によって変化させた。複素一般化正規分布の密度関数は以下で与えられる。

$$p_{X_i}(x_i) = \frac{c_i \exp\left(-\frac{|x_i|}{\sigma}\right)_i^c}{2\pi\sigma_i^2\Gamma\left(\frac{2}{c_i}\right)} \quad (27)$$

ここで形状母数 $c_i > 0$ は 2 つの変数で異なったものを用い、 $c_1 = 0.5, c_2 = 0.8$ とした。また σ_i^2 は、 $E[|X_i|^2] = 1$ となるように調整した。これらの形状母数は、以下のように与えられる複素カートシス [3] がおよそ 7.4, 2.3 の場合に相当し、ガウス性の面では音声の短時間フーリエ分析と類似したものとなっている。

$$\begin{aligned} \text{Kurt}[x] &= \frac{E[|x|^4]}{(E[|x|^2])^2} - \frac{|E[x]|^2}{(E[|x|^2])^2} - 2 \\ &= \frac{\Gamma(2/c)\Gamma(6/c)}{\Gamma(4/c)^2} - 2 \end{aligned} \quad (28)$$

実験結果を図 2 に示す。正規乱数に対する結果と同様に真の相関係数の周辺に推定地が分布しているため、非ガウス性によるモデルミスマッチの影響は大きくないことがわかる。

4.3 音響データの時間周波数領域の相関係数推定

次に、マイクロホンアレーで観測した音声混合の短時間フーリエ分析の振幅スペクトルに対する相関係数の推定を行う。観測信号のサンプリング周波数

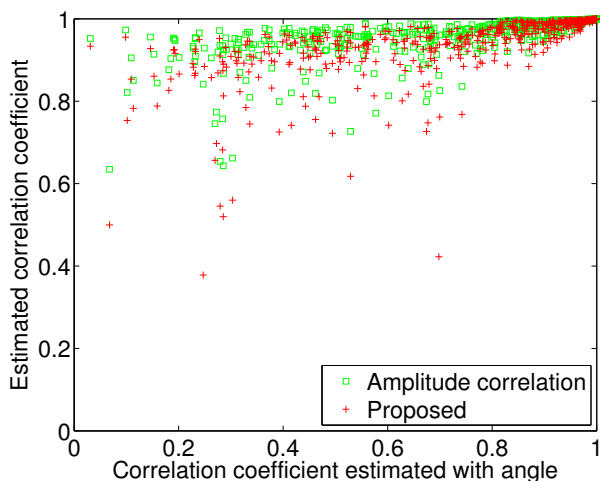


Fig. 3 Estimation results of correlation coefficients between two channels of speech mixture.

は 48 kHz、窓幅は 4096 サンプル、フレームシフトは 2048 サンプル、フレーム数は 80、EM アルゴリズムは近似最尤推定を初期値としてのイタレーション 20 回で学習した。

シミュレーション結果を図 3 に示す。厳密に定常な分布に従う疑似乱数の場合と違い、EM アルゴリズムの推定精度は低下していることがわかる。これは非定常性などの、さまざまな要因が関係していると思われるが、更なる原因究明が必要である。

5 おわりに

本稿では、複素変数の絶対値のみの観測から、EM アルゴリズムを用いて元の複素変数の相関係数を求める手法を提案した。元の複素変数は 2 変量複素正規分布に従うと仮定し、偏角の差を隠れ変数として扱うことにより、EM アルゴリズムに基づく最尤推定を定式化した。数値シミュレーションの結果、提案手法は観測データが正規分布に従わない場合にも相関係数のある程度の精度で推定できることを確認した。しかし、実際の音声の観測では相関推定の精度が低下することがわかった。原因としては観測の非定常性などが考えられるが、更なる検討が必要である。

参考文献

[1] F. J. Lopez-Martinez, D. Morales-Jimenez, E. Martos-Naya, J. F. Paris, “On the bivariate Nakagami-m cumulative distribution function: closed-form expression and applications,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, no. 4, pp. 1404-1414, 2013.

[2] M. Novey, T. Adali and A. Roy, “A Complex Generalized Gaussian Distribution—Characterization, Generation, and Estimation,” *IEEE Trans. Signal Processing*, 58(3), 2010.

[3] S. Javidi, D. P. Mandic, C. C. Took, and A. Cichocki, “Kurtosis-based blind source extraction of complex non-circular signals with application in EEG artifact removal in real-time,” *Frontiers in Neuroscience*, vol.5, no.105, 25 pages, 2011. doi:10.3389/fnins.2011.00105